Geometrija

Aleksandras Melnik

EGMO pasiruošimo stovykla 2025

1. **(Miquel's Theorem).** Let ABC be a triangle, and let X, Y, Z be points on lines BC, CA, AB, respectively. Assume that the six points A, B, C, X, Y, Z are all distinct. Then the circumcircles of the triangles AYZ, BZX, and CXY pass through a common point.

2. **(The Existence of the Orthocenter).** In any triangle ABC, the lines drawn from each vertex perpendicular to the opposite side (or its extension) are called the altitudes. These altitudes are concurrent, meaning they intersect at a single point, known as the *orthocenter*.

   (Hint: use Miquel's theorem)

3. **(The Existence of the Nine-Point Circle).** For any triangle ABC, there exists a unique circle, called the *nine-point circle*, that passes through:

   - The midpoints of the sides AB, BC, and CA;
   - The feet of the altitudes from the vertices;
   - The midpoints of the segments joining each vertex to the orthocenter.

4. **(The Existence of the Euler Line).** In any non-equilateral triangle ABC, the following three points are collinear:

   - The *centroid* (the intersection of the medians),
   - The *circumcenter* (the center of the circumscribed circle),
   - The *orthocenter* (the point of concurrency of the altitudes).
   - The *center of the nine-point circle.*

   This line is known as the *Euler line.*

5. **(Extra Minimisation Problem)** Given a fixed triangle ABC find points A', B', C' on the segements BC, CA, AB respectivelly, such that the perimeter of the triangle $A'B'C'$ is minimal.

Liekanų grupė

2025-04-06

Uždavinys 1. Įrodykite, kad liekanos ir jos atvirkštinės liekanos eilės sutampa.

Uždavinys 2. Tegu p – nelyginis pirminis skaičius. Įrodykite, kad a yra liekanų $mod\, p$ generatorius tada ir tik tada, kai

$$a^{\frac{p1}{q}} \not\equiv 1\,(mod\, p)$$

su visais pirminiais $p-1$ dalikliais q.

Uždavinys 3. Įrodykite, kad liekanų grupė moduliu pirminio p turi $\phi(p-1)$ generatorių.

Uždavinys 4. Įrodykite, kad visų grupės moduliu pirminio p generatorių sandauga yra lygi $(-1)^{\phi(p-1)}$.

Uždavinys 5. Įrodykite, kad $1^k + 2^k + ... + (p-1)^k \equiv 0\,(mod\, p)$, jei $p-1$ nedalo k ir $\equiv -1\,(mod\, p)$, jei $p-1$ dalo k.

Uždavinys 6. Įrodykite, kad jei a yra trečios eilės elementas moduliu pirminio $p > 3$, tai $a+1$ yra šeštos eilės elementas $modp$.

Uždavinys 7. Įrodykite, kad liekanų grupė moduliu pq, kur p ir q skirtingi pirminiai skaičiai, nėra ciklinė.

Uždavinys 8. Raskite visus pirminius p ir q, su kuriais $pq|2^p + 2^q$.

Sekos ir rekursija

2025-04-06

Uždavinys 1. Raskite formulę bendrajam sekos nariui F_n, kur $F_0 = 0, F_1 = 1$ ir $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ visiems $n \geq 0$.

Uždavinys 2. Raskite formulę bendrajam sekos nariui a_n, kur $a_0 = 0, a_1 = 1$ ir $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + 1$ visiems $n \geq 0$.

Uždavinys 3. Raskite formulę bendrajam sekos nariui b_n, kur $b_0 = 0, b_1 = 1$ ir $b_{n+2} = 3b_{n+1} + b_n + n$ visiems $n \geq 0$.

Uždavinys 4. Raskite formulę bendrajam sekos nariui c_n, kur $c_0 = 0, c_1 = 1$ ir $c_{n+2} = 2c_{n+1} - c_n + 2^n$ visiems $n \geq 0$.

Uždavinys 5. Raskite formulę bendrajam sekos nariui d_n, kur $d_1 = 0, d_2 = 1$ ir $nd_{n+2} = (n+1)d_{n+1} - d_n + n^2$ visiems $n \geq 0$.

Ekstremali kombinatorika

1. Kiek daugiausiai taškų galima pažymėti lygiakraščiame trikampyje, kurio kraštinės ilgis 2, kad atstumai tarp visų pažymėtų taškų porų būtų didesni nei 1?

2. Kiek daugiausiai žirgų galima sudėlioti 8×8 šachmatų lentoje, kad jie nekirstų vienas kito?

3. Kiek daugiausiai skaičių iš $1, 2, ..., 100$ galima paimti, kad tarp jų nebūtų dalijančių vienas kitą?

4. Kvadrate 4×4 pažymėti visi 16 langelių centrų. Kiek mažiausiai pažymėtų taškų reikia nuimti, kad kiekvieno iš 14 kvadratų su sveikomis kraštinėmis, kurių visi kampai yra pažymėti taškai, bent vienas kampas būtų nepažymėtas?

5. Vienoje šalyje automobilių numeriai yra iš 6 skaitmenų, ir kiekviena numerių pora skiriasi bent 2 skaitmenimis. Kiek daugiausiai tokių numerių gali būti?

6. Kiek daugiausiai galima parinkti 50×50 lentos langelių centrų taip, kad jokie trys iš jų nesudarytų stataus trikampio?

7. Iš skaičių 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 išmetant kelis, sudaromas toks rinkinys A, kad visos galimos jo dviejų skaičių sumos būtų skirtingos. Kiek daugiausia skaičių gali būti rinkinyje A?

8. (a) Vienoje tiesėje pažymėti 1014 taškų. Kiekvieną iš šių taškų porų sujungėme atkarpa ir jos vidurio tašką nuspalvinome raudonai. Kiek yra mažiausiai raudonų taškų?
   (b) Tas pats klausimas, tik taškai pažymėti plokštumoje, o ne tiesėje.

9. Kiek daugiausiai taškų galima pažymėti lygiakraščiame trikampyje, kurio kraštinės ilgis 3, kad atstumai tarp visų pažymėtų taškų porų būtų didesni nei 1?

10. Baltame kvadrate 7×7, padalytame į vienetinius kvadratėlius, užtušuoti 29 kvadratėliai. Įrodykite, kad visada galima rasti „kampuką“, sudarytą iš trijų užtušuotų langelių.

11. 1001×1001 lentoje m langelių nuspalvinta taip, kad:

    - kiekvienoje dviejų gretimų langelių poroje bent vienas yra nuspalvintas ir
    - tarp kiekvienų šešių iš eilės einančių langelių vienoje eilutėje arba viename stulpelyje yra bent du gretimi nuspalvinti langeliai.

    Raskite mažiausią m reikšmę.

12. Į kiek mažiausiai smailių trikampių galima padalyti kvadratą?