

Grafų teorija

2025-02-23

Uždavinys 1. Turnyre dalyvauja 18 komandų. Kiekviena pora komandų tarpusavyje žais tik viename etape. Jau įvyko 8 etapai. Įrodykite, kad egzistuoja trys komandos, kurios tarpusavyje nežaidė nė viename etape.

Uždavinys 2. Išvykos grupę sudaro 2000 žmonių. Tarp bet kurių 4 žmonių yra vienas, kuris pažįsta tris likusius. Kiek mažiausiai žmonių gali pažinti visą grupę?

Uždavinys 3. Ar gali 15 žmonių grupėje visi turėti lygiai po 5 draugus?

Uždavinys 4. Konferencijoje kiekvienas dalyvis nepažįsta daugiausia 3 kitų dalyvių. Įrodykite, kad įmanoma juos paskirstyti į 2 grupes taip, kad visi dalyviai savo grupėje nepažintų daugiausia 1 dalyvio.

Uždavinys 5. Duotas grafas G su n viršunių, ir grafas F su tomis pačiomis viršunėmis ir sąlyga, kad bet kurios dvi viršūnės yra sujungtos lygiai viename iš grafų. Įrodykite, kad F ir G kartu turi bent $\frac{1}{24}n(n-1)(n-5)$ trikampių.

Uždavinys 6. Duoti $2n$ taškų, iš jų jokie 4 nėra vienoje plokštumoje. Jeigu juos jungia $n^2 + 1$ atkarpa, įrodykite, kad šios atkarpos sudaro bent n trikampių.

Uždavinys 7. Tegul grafas G turi v viršunių ir e kraštinių. Įrodykite, kad jeigu $e \geq v + 4$, galime rasti du ciklus neturinčiu bendrų kraštinių.

Diofantinės lygtys

2025-02-23

Uždavinys 1. Raskite visus sveikuosius sprendinius lygčiai

$$3x(x - 3y) = y^2 + z^2$$

Uždavinys 2. Raskite visus natūraliuosius sprendinius lygčiai

$$x^2 + 5 = y^3$$

Uždavinys 3. Raskite visas natūraliųjų skaičių poras (n, k) tenkinančias lygtį

$$(n + 1)^k - 1 = n!$$

Uždavinys 4. Raskite visus neneigiamus sveikuosius sprendinius lygčiai

$$5^x 7^y + 4 = 3^z$$

Uždavinys 5. Raskite visus natūraliųjų skaičių trejetus (p, a, m) , kur p pirminis ir $a \leq 5p^2$ bei $(p - 1)! + a = p^m$

Uždavinys 6. Raskite visus neneigiamus sveikuosius sprendinius lygčiai

$$x^3 - y^3 = z!$$

Uždavinys 7. Raskite visus natūraliųjų skaičių trejetus (a, b, c) ir pirminius p tenkinančius lygtį

$$a^p + b^p + c^p = (p + 1)!$$