

Lietuvos merginų matematikos olimpiada 2024

2024.11.23

Taisyklės:

- Olimpiados trukmė yra 4h 30 min.
- Kiekvienas uždavinys vertinamas maksimaliai 7-iais taškais.
- Iš pirmų dviejų uždavinių kartu sudėjus nesurinkus bent 8 taškų, likę uždaviniai nebus tikrinami.
- Skaičiuotuvais ir kitomis elektroninėmis priemonėmis olimpiados metu naudotis negalima.

Uždavinys 1. Dešimtainėje išraiškoje

$$34! = 295232799039a041408476186096435b0000000.$$

Raskite skaičius a ir b .

*Pastaba: $n!$ žymi skaičiaus faktorialą, t.y. skaičių, gaunamą sudauginus visus natūraliuosius nuo 1 iki n imtinai. Pavyzdžiui $5! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 120$.*

Uždavinys 2. Tarkime, AK ir BL yra trikampio ABC aukštinės. Įrodykite, kad jei $BK = KL$, tai trikampis ABC yra lygiašonis.

Uždavinys 3. Lygiagretainyje $ABCD$ tiesė, einanti per C , kerta įstrižainę BD taške E ir kraštinę AB taške F . Jei F yra AB vidurio taškas, o trikampio BEC plotas yra 100, raskite keturkampio $AFED$ plotą.

Uždavinys 4. Įrodykite, kad neegzistuoja tokie natūralieji skaičiai x, y , kad:

$$(x+1)^2 + (x+2)^2 + \dots + (x+9)^2 = y^2$$

Uždavinys 5. Tarkime, kad a, b ir c yra realieji skaičiai, kuriems galioja lygtis $abc = 1$. Įrodykite, kad:

$$\frac{1}{1+a^{2024}} + \frac{1}{1+b^{2024}} + \frac{1}{1+c^{2024}} > 1.$$

Uždavinys 6. Kiekvienas 1×1 langelis 10×10 lentoje yra nudažytas juoda arba balta spalva taip, kad kiekvienas juodas langelis turi bent 3 baltus kaimynus (du langeliai yra kaimynai, jei turi bendrą kraštinę). Koks yra maksimalus juodų langelių skaičius? O 11×11 dydžio lentelėje?

Lietuvos merginų matematikos olimpiada 2024

2024.11.23

Uždavinys 1. Dešimtainėje išraiškoje

$$34! = 295232799039a041408476186096435b0000000.$$

Raskite skaičius a ir b .

Pastaba: $n!$ žymi skaičiaus faktorialą, t.y. skaičių, gaunamą sudauginus visus natūraliuosius nuo 1 iki n imtinai.

*Pavyzdžiui $5! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 120$.*

Sprendimas: Naudosime dalumo iš 9 ir 11 taisykles. Dalumas iš 9 mums duoda, kad, kadangi $34!$ dalus iš 9, tai $2 + 9 + 5 + 2 + 3 + 2 + 7 + 9 + 9 + 0 + 3 + 9 + a + 0 + 4 + 1 + 4 + 0 + 8 + 4 + 7 + 6 + 1 + 8 + 6 + 0 + 9 + 6 + 4 + 3 + 5 + b = a + b + 136$ dalu iš 9, taigi $a + b$ turi liekaną 8 dalinant iš 9.

Dalumas iš 11 mums duoda, kad, kadangi $34!$ dalus iš 11, tai $2 - 9 + 5 - 2 + 3 - 2 + 7 - 9 + 9 - 0 + 3 - 9 + a - 0 + 4 - 1 + 4 - 0 + 8 - 4 + 7 - 6 + 1 - 8 + 6 - 0 + 9 - 6 + 4 - 3 + 5 - b = a - b + 18$ dalu iš 11, taigi $a - b$ turi liekaną 4 dalinant iš 11.

Perrinkus nesunku pastebėti, kad vieninteliai skaičiai, tenkinantys abi sąlygas, yra $a = 6, b = 2$.

Uždavinys 2. Tarkime, AK ir BL yra trikampio ABC aukštinės. Įrodykite, kad jei $BK = KL$, tai trikampis ABC yra lygiašonis.

Sprendimas: Pažymėkime kampo C dydį c . Tada $\angle LBK = 90^\circ - c$. Kadangi $BK = KL$, tai $\angle BLK = 90^\circ - c$. Bet tada $\angle KLC = 90^\circ - \angle BLK = c$. Vadinas, $BK = KL = KC$. Vadinas, AK yra ne tik trikampio aukštinė, bet ir pusiaukraštinė, taigi ABC - lygiašonis.

Uždavinys 3. Lygiagretainyje $ABCD$ tiesė, einanti per C , kerta įstrižainę BD taške E ir kraštinę AB taške F . Jei F yra AB vidurio taškas, o trikampio BEC plotas yra 100, raskite keturkampio $AFED$ plotą.

Sprendimas: Pastebėkime, kad trikampiai BEF ir DEC - panašieji (pagal tris kampus) ir trikampis BEF yra 2 kartus mažesnis (nes BF 2 kartus trumpesnė už CD). Vadinas, jei BEF plotas yra S , tai CDE plotas yra $4S$.

Taip pat, trikampių ADF ir BCF plotai lygūs (nes $AF = FB$ ir aukštinės, nubrėžtos iš D ir C į atitinkamai kraštines AF ir BF , yra lygios). Taigi, trikampio AFD plotas yra $100 + S$.

Taip pat, trikampiai ABD ir CDB lygūs (ir ypač, jų plotai lygūs pusei lygiagretainio plotui). Iš to gauname, kad EDF plotas yra $100 + 4S - S - (100 + S) = 2S$.

Kadangi BEF plotas dvigubai mažesnis už DEF plotą, tai reiškia, kad kraštinė BE yra dvigubai trumpesnė už DE (nes aukštinė, nuleista iš F į BE ir DE yra ta pati).

Bet tada, dėl tos pačios logikos, BCE plotas dvigubai mažesnis už CDE plotą. Vadinas, $4S = 2 * 100$, taigi $S = 50$. Vadinas, keturkampio $AFED$ plotas yra $3S + 100 = 250$.

Uždavinys 4. Įrodykite, kad neegzistuoja tokie natūralieji skaičiai x, y , kad:

$$(x+1)^2 + (x+2)^2 + \dots + (x+9)^2 = y^2$$

Sprendimas: Atskliaudę kairę pusę gauname $9x^2 + 90x + 285 = y^2$. Kairė pusė dalinasi iš 3, taigi y dalinasi iš 3. Bet tada y^2 dalinasi iš 9. Tačiau kairė pusė yra $9(x^2 + x + 31) + 6$ - nesidalina iš 9. Taigi lygtis natūraliųjų sprendinių neturi.

Uždavinys 5. Tarkime, kad a, b ir c yra realieji skaičiai, kuriems galioja lygtis $abc = 1$. Įrodykite, kad:

$$\frac{1}{1+a^{2024}} + \frac{1}{1+b^{2024}} + \frac{1}{1+c^{2024}} > 1.$$

Sprendimas: Pažymėkime $x = a^{2024}, y = b^{2024}, z = c^{2024}$. Tada $xyz = 1$ ir $x, y, z > 0$. Tada mums reikia įrodyti, kad

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} > 1.$$

Viską išdauginę gauname $3 + 2(x+y+z) + xy+xz+yz > 1 + x + y + z + xy + xz + yz + xyz$. Išprastinę ir prisiminę, kad $xyz = 1$, gauname $1 + x + y + z > 0$, kas akivaizdžiai tiesa. Įrodyta.

Uždavinys 6. Kiekvienas 1×1 langelis 10×10 lentoje yra nudažytas juoda arba balta spalva taip, kad kiekvienas juodas langelis turi bent 3 baltus kaimynus (du langeliai yra kaimynai, jei turi bendrą kraštinę). Koks yra maksimalus juodų langelių skaičius? O 11×11 dydžio lentelėje?

Sprendimas: Atkreipkime dėmesį, kad bet kurioje 2×2 lentelės dalyje gali būti daugiausiai 2 juodi kvadratai. Taip pat, kampiniai langeliai negali būti juodi (turi tik po du kaimynus). O iš kraštinių langelių, daugiausiai kas antras gali būti juodas (nes turi tik po tris kaimynus, kurie visi privalo būti balti). Taigi 10×10 kiekvienas kraštas turi po daugiausiai 4 juodus langelius, o vidinį 8×8 kvadratą galima padalinti į $16 \times 2 \times 2$ kvadratelių. Taigi iš viso maksimaliai gauname $4 \times 4 + 16 \times 2 = 48$ juodus kvadratus. Pavyzdys apačioje.

11×11 lentą galima padalinti į 10×10 ir likusias dvi lentos kraštines (tarkime, apatinę ir dešinę). Tada 10×10 galime padalinti į $25 \times 2 \times 2$ kvadratus, o kiekvienoje kraštinėje žinome, kad gali būti ne po daugiau nei 5 juodus langelius (nes kampinis negali būti juodas, o iš likusių daugiausiai kas antras gali būti juodas). Taigi iš viso maksimaliai gauname $25 \times 2 + 2 \times 5 = 60$ juodus kvadratus. Pavyzdys apačioje.

