# Olimpiada

Daumilas Ardickas

**Uždavinys 1.** Skaičius $a_0$ yra natūralusis. Seka $\{a_n\}_{n\geq 0}$ apibrėžta taip: jei

$$a_n = \sum_{i=0}^{j} c_i 10^i,$$

kur $c_i \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$, tai

$$a_{n+1} = c_0^{2007} + c_1^{2007} + \cdots + c_j^{2007}.$$

Ar įmanoma taip pasirinkti $a_0$, kad visi sekos nariai yra skirtingi?

**Uždavinys 2.** Duota, kad $t \geq \frac{1}{2}$ yra realus skaičius, o $n$ – natūralus. Įrodykite, kad

$$t^{2n} \geq (t-1)^{2n} + (2t-1)^n$$

**Uždavinys 3.** Raskite visus teigiamus realiuosius skaičius $x$ ir $y$, tenkinančius lygtį

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 4 = 2 \cdot (\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1})$$

**Uždavinys 4.** Skaičiai $a$, $b$, $c$ yra teigiami realieji, taip pat $abc = 1$. Įrodykite, kad

$$\frac{a}{a^2+2} + \frac{b}{b^2+2} + \frac{c}{c^2+2} \leq 1$$

**Uždavinys 5.** Ant lentos parašyti du natūralieji skaičiai. Vienas iš jų yra 2011, o kitas mažesnis nei 2011. Jei tų skaičių aritmetinis vidurkis yra natūralusis skaičius $m$, vienu ėjimu galime nutrinti vieną iš skaičių ir vietoje jo parašyti $m$. Įrodykite, kad maksimalus ėjimų skaičius yra 10. Pateikite pavyzdį, kai operaciją galima atlikti 10 kartų.

**Uždavinys 6.** Ant stalo guli išrikiuotos 12 kortų. Kortos gali būti trijų rūšių: balta iš abiejų pusių, juoda iš abiejų pusių arba balta iš vienos ir juoda iš kitos pusės. Pradžioje matome 9 juodas puses. Apvertus $1-6$ kortas, matome 4 juodas puses. Po to apvertus $4-9$ kortas, matome 6 juodas puses. Galiausiai, apvertus $1-3$ ir $10-12$ kortas, matome 5 judoas puses. Kiek kurios rūšies kortų turime?

**Uždavinys 7.** Turime $40 \times 50$ lentą. Kiekviename langelyje yra po mygtuką, kuris kontroliuoja tame langelyje esančią lempą, kuri gali būti įjungta arba išjungta. Paspaudus ant lempos mygtuko, pasikeičia ne tik tos lempos, bet ir visų lempų, esančių tame stulpelyje ir visų, esančių toje eilutėje, būsena. Pradžioje visos lempos išjungtos. Įrodykite, kad galima taip spausti mygtukus, kad galiausiai visos lempos bus įjungtos. Kiek mažiausiai paspaudimų reikės?

**Uždavinys 8.** Jonukas ant lapo kažkokia tvarka parašė skaičius $1, 2, \ldots, n$. Po to jis sudarė visų tokių porų $(i, j)$ sąrašą, kad $1 \leq i < j \leq n$ ir $i$-tasis skaičius didesnis už $j$-tąjį skaičių jo užrašytame lape. Po to Jonukas kartoja šį veiksmą: jis pasirenka porą $(i, j)$ iš savo sąrašo, sukeičia savo parašytus $i$-tąjį ir $j$-tąjį skaičius ir ištrina porą $(i, j)$ iš sąrašo. Įrodykite, kad Jonukas gali pasirinkti poras tokia eilės tvarka, kad padarius visus ėjimus, skaičiai parašyti didėjimo tvarka.

**Uždavinys 9.** Duotas status trikampis $ABC$, $\angle A = 90°$ ir $AB \neq AC$. Taškai $D$, $E$, $F$ taip padėti atitinkamai ant atkarpų $BC$, $CA$, $AB$, kad $AFDE$ yra kvadratas. Įrodykite, kad tiesė $BC$, tiesė $FE$ ir apie $ABC$ apibrėžto apskritimo liestinė taške $A$ kertasi viename taške.

**Uždavinys 10.** Smailiame trikampyje $ABC$ nubrėžta aukštinė $CD$, o taškas $H$ yra šio trikampio ortocentras. Duota, kad apie trikampį apibrėžto apskritimo centras yra ant kampo $DHB$ pusiaukampinės. Raskite visas galima kampo $\angle CAB$ reikšmes.

**Uždavinys 11.** Taškai $M$ ir $N$ taip padėti ant trikampio $ABC$ pusiaukampinės $AL$, kad $\angle ABM = \angle ACN = 23°$. Taškas $X$ taip padėtas trikampio $ABC$ viduje, kad $BX = CX$ ir $\angle BXC = 2\angle BML$. Raskite $\angle MXN$.

**Uždavinys 12.** Duotas smailus trikampis $ABC$, taškas $H$ yra jo ortocentras. Pažymėkime taškus $H_A$, $H_B$ ir $H_C$, kurie yra atitinkamai antri aukštinių iš $A$, $B$, ir $C$ susikirtimo taškai su apie $ABC$ apibrėžtu apskritimu. Įrodykite, kad trikampio $H_AH_BH_C$ plotas negali būti didesnis už trikampio $ABC$ plotą.

**Uždavinys 13.** Duota tokia natūraliųjų skaičių seka $a_1, a_2, \ldots$, kad kiekvienam $m$ ir $n$ galioja ši savybė: jei $m$ yra skaičiaus $n$ daliklis ir $m < n$, tada $a_m$ yra skaičiaus $a_n$ daliklis ir $a_m < a_n$. Raskite mažiausią įmanomą skaičiaus $a_{2000}$ reikšmę.

**Uždavinys 14.** Duoti tokie natūralieji skaičiai $x, y, z$, kad $\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{z} + \frac{z+1}{x}$ yra sveikas skaičius. Skaičius $d$ yra $x, y$ ir $z$ didžiausias bendras daliklis. Įrodykite, kad $d \leq \sqrt[3]{xy + yz + zx}$.

**Uždavinys 15.** Skaičiai $a$ ir $b$ yra natūralieji, $b < a$, taip pat $a^3 + b^3 + ab$ dalijasi iš $ab(a-b)$. Įrodykite, kad $ab$ yra natūralaus skaičiaus kubinis laipsnis.

**Uždavinys 16.** Raskite visus natūraliuosius $n$, kuriems egzistuoja tokia begalinė aibė $A$, sudaryta iš skirtingų natūraliųjų skaičių, kad bet kuriems paporiui skirtingiems aibės $A$ nariams $a_1, \ldots, a_n \in A$, skaičiai $a_1 + \ldots + a_n$ ir $a_1 a_2 \ldots a_n$ yra tarpusavyje pirminiai.

# Olimpiada

Ernestas Ramanauskas

2024-11-08

**Uždavinys 1.** Raskite visas tokias pirminių skaičių poras $(p, q)$, kad $p^3 - q^5 = (p+q)^2$.

**Uždavinys 2.** Raskite visus tokius natūraliuosius skaičius $d$, kurie dalo bet kokį skaičių, gautą išrikiavus bet kurio $d$ kartotinio skaitmenis bet kokia tvarka.

**Uždavinys 3.** Raskite visas pirminių skaičių poras $(p, q)$, kurioms $p^2 + q^3$ ir $q^2 + p^3$ yra natūraliųjų skaičių kvadratai.

**Uždavinys 4.** Raskite visus natūraliuosius skaičius $n$, kuriems $3^n + 1$ dalinasi iš $n^2$.

**Uždavinys 5.** Raskite visus tokius realiuosius skaičius $a$, kuriems egzistuoja nevienareikšmė funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tenkinanti šias lygybes visiems realiesiems skaičiams $x$:

$$i) f(ax) = a^2 f(x)$$
$$ii) f(f(x)) = af(x)$$

**Uždavinys 6.** Tegul $a, b, c, d, e, f$ yra neneigiami realieji skaičiai, tenkinantys sąlygą $a + b + c + d + e + f = 6$. Raskite didižausią galimą reiškinio

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab$$

reikšmę ir raskite visus rinkinius $(a, b, c, d, e, f)$, su kuriais ši reikšmė pasiekiama.

**Uždavinys 7.** Raskite visus tokius natūraliuosius skaičius $n$, kuriems nelygybė

$$3x^n + n(x+2) - 3 \geq nx^2$$

galioja visiems realiesiems skaičiams $x$.

**Uždavinys 8.** Tegul $a, b, c, d$ yra neneigiami realieji skaičiai, tenkinantys $a + b + c + d = 4$. Įrodykite nelygybę

$$\frac{a}{a^3+8} + \frac{b}{b^3+8} + \frac{c}{c^3+8} + \frac{d}{d^3+8} \leq \frac{4}{9}$$

**Uždavinys 9.** Ar egzistuoja šešiakampis (nebūtinai iškilasis), kurio kraštinių ilgiai yra $1, 2, 3, 4, 5, 6$ (nebūtinai tokia tvarka) ir kurį galima be persidengimų sudaryti iš $a)31$; $b)32$ lygiakraščių trikampėlių, kurių kraštinės ilgis yra 1?

**Uždavinys 10.** Lentoje parašyta $n$ skaičių, lygių 1. Ėjimo metu reikia nutrinti du skaičius ir du kartus parašyti jų sumą. Po $h$ ėjimų visi $n$ skaičių tapo lygūs $m$. Įrodykite, kad $h \leq \frac{1}{2} n \log_2 m$.

**Uždavinys 11.** Tegul $T$ žymi penkiolikos elementų aibę $\{10a + b : a, b \in \mathbb{Z}, 1 \leq a < b \leq 6\}$. Tegul $S$ žymi $T$ poaibį, kuriame pasitaiko visi skaitmenys, bet jokie trys aibės $S$ elementai kartu neturi šešių skirtingų skaitmenų. Raskite didžiausią tokį poaibį $S$.

**Uždavinys 12.** Kubą sudaro $4^3$ vienetinių kubelių, kurių kiekviename įrašyta po sveikąjį skaičių. Ėjimo metu reikia pasirinkti kubelį ir kiekviename bendrą sieną su juo turinčiame gretimame kubelyje skaičių padidinti vienetu. Ar su bet kokia pradine situacija galima pasiekti, kad visi $4^3$ skaičių dalytųsi iš 3?

**Uždavinys 13.** Trikampio $ABC$ pusiaukampinės iš $C$ ir $B$ kerta priešais esančias kraštines $AB$ ir $AC$ atitinkamai taškuose $D$ ir $E$. Tiesėje $AB$ pažymėtas toks taškas $F$, kad $B$ yra tarp $A$ ir $F$. Tiesėje $AC$ pažymėtas toks taškas $G$, kad $C$ yra tarp $A$ ir $G$. Galioja lygybės $BF = CG = BC$. Įrodykite, kad $FG \| DE$.

**Uždavinys 14.** Duotas lygiagretainis $ABCD$ su kampu $\angle BAD = 60°$. Kraštinių $BC$ ir $CD$ vidurio taškai atitinkamai pažymėti $K$ ir $L$. Keturkampis $ABKL$ yra įbrėžtinis. Raskite $\angle ABD$.

**Uždavinys 15.** Įbrėžtinio keturkampio $ABCD$ kraštinės $AB$ ir $CD$ nelygiagrečios. Pažymėti $CD$ vidurio taškas $M$ ir toks $ABCD$ vidaus taškas $P$, kad $PA = PB = CM$. Įrodykite, kad tiesės $AB$, $CD$ ir atkarpos $MP$ vidurio statmuo kertasi viename taške.

**Uždavinys 16.** Tegul $M$ yra trikampio $ABC$ pusiaukraštinių susikirtimo taškas. Tiesė $t$, einanti per $M$, kerta trikampio $ABC$ apibrėžtinį apskritimą taškuose $X$ ir $Y$ taip, kad $A$ ir $C$ yra toje pačioje tiesės $t$ pusėje. Įrodykite, kad

$$BX \cdot BY = AX \cdot AY + CX \cdot CY$$

# Olimpiada

Greta Morkūnė

**Uždavinys 1.** Raskite tris skirtingus daugianarius $P(x)$ su realiaisiais koeficientais, tenkinančius lygtį $P\left(x^2+1\right)=P(x)^2+1$ visiems realiesiems $x$.

**Uždavinys 2.** Raskite visus lygčių sistemos realiuosius sprendinius:

$$\begin{cases} x+y+z+t=5 \\ xy+yz+zt+tx=4 \\ xyz+yzt+ztx+txy=3 \\ xyzt=-1 \end{cases}$$

**Uždavinys 3.** Įrodykite, kad visiems teigiamiems realiesiems $a, b, c$ teisinga nelygybė

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2} \geq \sqrt{a^2+ac+c^2}$$

**Uždavinys 4.** Duota seka $\{a_k\}_{k\geq 1}$, tenkinanti $a_1=1$, $a_2=\frac{1}{2}$ ir

$$a_{k+2}=a_k+\frac{1}{2}a_{k+1}+\frac{1}{4a_k a_{k+1}} \text{ for } k \geq 1.$$

Įrodykite, kad:

$$\frac{1}{a_1 a_3}+\frac{1}{a_2 a_4}+\frac{1}{a_3 a_5}+\cdots+\frac{1}{a_{98} a_{100}}<4.$$

**Uždavinys 5.** Ant stalo išrikiuotos 2024 lempos. Du žaidėjai žaidžia žaidimą. Kiekvienu ėjimu žaidėjas įjungia arba išjungia vieną iš lempų, bet žaidėjas niekada negali grįžti į tokį lempų išdėstymą, kuris jau yra buvęs anksčiau (pavyzdžiui, jei kažkada degė tik pirmoji lempa, žaidėjas niekada negali sugrįžti į situaciją, kai dega tik pirmoji lempa). Žaidėjas, kuris nebegali padaryti ėjimo, pralaimi. Kuris žaidėjas turi laiminčiąją strategiją?

**Uždavinys 6.** Tegu $N$ yra natūralusis skaičius. Du žaidėjai žaidžia žaidimą. Pirmasis žaidėjas ant lentos taip užrašo natūraliuosius skaičius (nebūtinai skirtingus), kad kiekvienas iš užrašytų skaičių neviršija 25, o visų parašytų skaičių suma yra bent 200. Antrasis žaidėjas laimi, jei jis gali taip pasirinkti kažkuriuos iš užrašytų skaičių, kad jų suma yra $S$ ir $200-N \leq S \leq 200+N$. Koks yra mažiausias $N$ su kuriuo antrasis žaidėjas turi laiminčiąją strategiją?

**Uždavinys 7.** Vakarėlyje buvo 14 draugų. Vienas iš jų, Petras, nusprendė išeiti. Jis atsisveikino su 10 iš savo draugų, pamiršo apie likusius 3, ir išėjo. Netrukus jis grįžo, vėl atsisveikino su 10 draugų (nebūtinai tais pačiais, kaip pirmą kartą), ir vėl išėjo. Toliau Petras grįžo dar kažkiek kartų, kiekvieną kartą atsisveikindavo su lygiai 10 draugų, ir išeidavo. Kai tik jis jau buvo atsisveikinęs su kiekvienu draugu bent po vieną kartą, jis išėjo ir nebegrįžo. Ryte Petras suprato, kad su kiekvienu iš savo draugų jis atsisveikino po skirtingą skaičių kartų. Kiek mažiausiai kartų Petras grįžo į vakarėlį?

**Uždavinys 8.** Du magai atlieka triuką. Pirmasis magas išeina iš kambario. Antrasis magas turi kortų kaladę su 100 kortų, kurios sunumeruotos $1, 2, \ldots, 100$ ir jis paprašo trijų žiūrovų išsirinkti po kortą. Antrasis magas žino, kurią kortą išsirinko kiekvienas žiūrovas. Tada jis išsirenka dar vieną kortą iš likusios kaladės ir sumaišo šias 4 kortas, pakviečia pirmąjį magą ir jam atiduoda tas 4 kortas. Pirmas magas tada "atspėja", kurią kortą pasirinko pirmasis žiūrovas, kurią antrasis ir kurią trečiasis. Įrodykite, kad magai gali atlikti šį triuką.

**Uždavinys 9.** Duotas iškilasis keturkampis $ABCD$, kur $ADC=90°$. Tegu $E$ ir $F$ yra atitinkamai projekcijos iš taško $B$ į tieses $AD$ ir $AC$. Duota, kad taškas $F$ yra tarp $A$ ir $C$, taškas $A$ yra tarp $D$ ir $E$, tiesė $EF$ eina pro atkarpos $BD$ vidurio tašką. Įrodykite, kad apie $ABCD$ galima apibrėžti apskritimą.

**Uždavinys 10.** Duotas trikampis $ABC$, kur $\angle A=60°$. Taškas $T$ yra taip padėtas trikampio viduje, kad $\angle ATB=\angle BTC=\angle CTA=120°$. Taškas $M$ yra $BC$ vidurio taškas. Įrodykite, kad $TA+TB+TC=2AM$.

**Uždavinys 11.** Į trikampį $ABC$ įbrėžtas apskritimas liečia kraštinę $AC$ taške $D$. Nubrėžtas apskritimas, einantis per tašką $D$ ir liečiantis spindulius $BC$ ir $BA$, spindulį $BA$ liečia taške $A$. Raskite $\frac{AD}{DC}$.

**Uždavinys 12.** Duotas trikampis $ABC$, tiesės $AD, BE$ ir $CF$ yra jo aukštinės. Taškai $P, Q, R$ ir $S$ tenkina šias sąlygas: i) $P$ yra apie $ABC$ apibrėžto apskritimo centras. ii) Visų $PQ, QR$ and $RS$ atkarpų ilgiai yra lygūs apie $ABC$ apibrėžto apskritimo spinduliui. iii) Vektorius $PQ$ turi tą pačią kryptį, kaip vektorius $AD$. Taip pat, vektorius $QR$ turi tą pačią kryptį, kaip $BE$, o $RS$ turi tą pačią kryptį, kaip $CF$. Įrodykite, kad $S$ yra į trikampį $ABC$ įbrėžto apskritimo centras.

**Uždavinys 13.** Duota, kad $a_1, a_2, \ldots, a_n$ yra tokia sveikų skaičių aritmetinė progresija, kad $i|a_i$ kiekvienam $i = 1, 2, \ldots, n-1$, bet $n \nmid a_n$. Įrodykite, kad $n$ yra kažkokio pirminio skaičiaus laipsnis.

**Uždavinys 14.** Žinoma, kad $a, b, c, d$ yra tokie nenuliniai sveikieji, kad vieninteliai $(x, y, z, t)$, tenkinantys lygtį

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$$

yra $x = y = z = t = 0$. Ar tai reiškia, kad skaičiai $a, b, c, d$ turi tą patį ženklą (visi teigiami arba visi neigiami)?

**Uždavinys 15.** Raskite visus tokius natūraliuosius $n$, kad dešimtainė skaičiaus $n^2$ išraiška yra sudaryta vien iš nelyginių skaitmenų.

**Uždavinys 16.** Ar egzistuoja tokia begalinė, nekonstatinė aritmetinė progresija, kad kiekvienas jos narys gali būti užrašomas kaip $a^b$, kur $a$ ir $b$ yra natūralieji skaičiai ir $b \geq 2$?

# Olimpiada

Deividas Morkūnas

**Uždavinys 1.** Tegul $n$ yra teigiamas sveikasis skaičius. Tarkime, kad iš lentelės

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n & (n-1)n+1 & \cdots & n^2-1 \end{array}$$

yra pasirenkami $n$ skaičiai taip, kad nė vienas iš jų nebūtų iš tos pačios eilutės ar stulpelio. Raskite didžiausią galimą šių $n$ skaičių sandaugą.

**Uždavinys 2.** Tegul $k$ ir $n$ yra teigiami sveikieji skaičiai, o $x_1, x_2, \cdots, x_k, y_1, y_2, \cdots, y_n$ yra skirtingi sveikieji skaičiai. Polinomas $P$ su sveikaisiais koeficientais tenkina sąlygas

$$P(x_1) = P(x_2) = \cdots = P(x_k) = 54$$

$$P(y_1) = P(y_2) = \cdots = P(y_n) = 2013.$$

Nustatykite didžiausią galimą $kn$ reikšmę.

**Uždavinys 3.** Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios tenkina lygybę

$$f(xf(y) + y) + f(-f(x)) = f(yf(x) - y) + y$$

visiems $x, y \in \mathbb{R}$.

**Uždavinys 4.** Įrodykite, kad jei realieji skaičiai $a, b$ ir $c$ tenkina $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, tuomet

$$\frac{a^2}{2+b+c^2} + \frac{b^2}{2+c+a^2} + \frac{c^2}{2+a+b^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{12}.$$

Kada nelygybė tampa lygybe?

**Uždavinys 5.** Realiųjų teigiamų (nebūtinai skirtingų) skaičių baigtinį (nesutvarkytą) rinkinį vadinkime *subalansuotu*, jei kiekvienas jo skaičius yra mažesnis už likusių skaičių sumą. Raskite visus $m \geq 3$, kuriems kiekvienas $m$ skaičių subalansuotas rinkinys gali būti padalytas į tris dalis, turinčias savybę: bet kurių dviejų dalių visų skaičių suma yra didesnė už likusios dalies visų skaičių sumą.

**Uždavinys 6.** Kažkiek $1 \times 2$ domino kauliukų, kurių kiekvienas dengia du gretimus vienetinius kvadratėlius, yra išdėstyti $n \times n$ dydžio lentoje taip, kad nė vienas iš jų nesiliečia (net ir per kampą). Žinant, kad bendras domino kauliukų uždengtas plotas yra 2008, raskite mažiausią galimą $n$ reikšmę.

**Uždavinys 7.** Ant lentos užrašytas teigiamas sveikasis skaičius. Žaidėjai $A$ ir $B$ žaidžia šį žaidimą: kiekviename ėjime reikia pasirinkti tinkamą skaičiaus $n$ ($n$ yra parašytas ant lentos) daliklį $m$ ($1 < m < n$) ir pakeisti $n$ į $n - m$. Pirmąjį ėjimą atlieka žaidėjas $A$, po to žaidėjai keičiasi ėjimais. Žaidėjas, kuris negali atlikti ėjimo, pralaimi žaidimą. Kokiems pradiniams skaičiams egzistuoja laiminti strategija žaidėjui $B$?

**Uždavinys 8.** Duotas natūralusis skaičius $n$. Ragana skrajoja erdvėje $\mathbb{R}^3$. Ji pradeda kelionę taške $(0, 0, 0)$. Ji moka teleportuotis į bet kurį tašką su sveikosiomis koordinatėmis, esantį tiksliu atstumu $\sqrt{n}$ nuo jos esamos padėties. Tačiau teleportacijos burtai yra sudėtingi. Todėl, nors pradžioje ragana jaučiasi puikiai, po pirmos teleportacijos ji pasijunta klaikiai. Po dar vienos teleportacijos ji vėl jaučiasi puikiai, po to vėl klaikiai, ir t. t.

Kurioms $n$ reikšmėms ragana gali patekti į bet kurį tašką su sveikosiomis koordinatėmis ir puikiai jaustis jame?

**Uždavinys 9.** Grafas turi $N$ viršūnių. Nematomas kiškis tupi vienoje iš jų. Medžiotojų būrys bando nušauti kiškį. Kaskart jie šauna vienu metu: kiekvienas į kurią nors vieną viršūnę (nebūtinai tą pačią), pasirinkę taikinius sutartinai. Jei šaunama į viršūnę, kurioje tupi kiškis, tai medžioklė baigiasi. Priešingu atveju kiškis gali likti savo viršūnėje arba peršokti į vieną iš gretimų viršūnių.

Medžiotojai žino algoritmą, kaip nušauti kiškį per daugiausiai $N!$ ėjimų (medžiotojų bendrų šūvių). Įrodykite, kad egzistuoja algoritmas, kaip nušauti kiškį per daugiausiai $2^N$ ėjimų.

**Uždavinys 10.** Pirtyje yra $n$ kambarių, kiekvieno kambario talpa yra neribota. Jokiame kambaryje tuo pačiu metu negali būti moteris ir vyras. Be to, vyrai nori dalintis kambariu tik su tais vyrais, kurių jie nepažįsta, o moterys nori dalintis kambariu tik su tomis moterimis, kurias jos pažįsta. Raskite didžiausią skaičių $k$, kad bet kurios $k$ poros galėtų vienu metu lankytis pirtyje, esant sąlygai, kad du vyrai pažįsta vienas kitą tada ir tik tada, kai jų žmonos pažįsta viena kitą.

**Uždavinys 11.** Trapecija $ABCD$ su pagrindais $AB$ ir $CD$ yra tokia, kad trikampio $BCD$ apibrėžtinis apskritimas kerta tiesę $AD$ taške $E$, skirtingame nuo $A$ ir $D$. Įrodykite, kad trikampio $ABE$ apibrėžtinis apskritimas liečia $BC$.

**Uždavinys 12.** Plokštumoje yra keturi apskritimai, turintys bendrą centrą. Jų spinduliai sudaro griežtai didėjančią aritmetinę progresiją. Įrodykite, kad nėra tokio kvadrato, kurio kiekviena viršūnė gulėtų ant skirtingo apskritimo.

**Uždavinys 13.** Trikampio $ABC$ kampo $A$ pusiaukampinė kerta $BC$ taške $D$ ir kerta trikampio $ABC$ apibrėžtinį apskritimą taške $E$. Tegul $K, L, M$ ir $N$ yra atitinkamai atkarpų $AB, BD, CD$ ir $AC$ vidurio taškai. Tegul $P$ yra trikampio $EKL$ apibrėžtinio apskritimo centras, o $Q$ – trikampio $EMN$ apibrėžtinio apskritimo centras. Įrodykite, kad $\angle PEQ = \angle BAC$.

**Uždavinys 14.** Smailaus trikampio $ABC$ aukštinės $BB_1$ ir $CC_1$ susikerta taške $H$. Tegul $B_2$ ir $C_2$ yra taškai atkarpose $BH$ ir $CH$, atitinkamai, tokie, kad $BB_2 = B_1H$ ir $CC_2 = C_1H$. Trikampio $B_2HC_2$ apibrėžtinis apskritimas susikerta su trikampio $ABC$ apibrėžtiniu apskritimu taškuose $D$ ir $E$. Įrodykite, kad trikampis $DEH$ yra status.

**Uždavinys 15.** Tegu $ABCD$ yra lygiagretainis. Apskritimas, kurio skersmuo yra $AC$, kerta tiesę $BD$ taškuose $P$ ir $Q$. Statmuo tiesei $AC$, einantis per tašką $C$, kerta tieses $AB$ ir $AD$ taškuose $X$ ir $Y$, atitinkamai. Įrodykite, kad taškai $P, Q, X$ ir $Y$ yra ant to paties apskritimo.

**Uždavinys 16.** Raskite visas baigtines teigiamų sveikųjų skaičių aibes, turinčias bent du elementus, tokias, kad bet kuriems dviem skaičiams $a$, $b$ $(a > b)$, priklausantiems aibei, skaičius $\frac{b^2}{a-b}$ taip pat priklausytų aibei.

**Uždavinys 17.** Kiek teigiamų sveikųjų skaičių porų $(m, n)$, kurioms $m < n$, tenkina lygtį $\frac{3}{2008} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$?

**Uždavinys 18.** Raskite visus teigiamų sveikųjų skaičių trejetus $(a, b, c)$, kuriems

$$\frac{(a+b)^4}{c} + \frac{(b+c)^4}{a} + \frac{(c+a)^4}{b}$$

yra sveikasis skaičius, o $a + b + c$ yra pirminis skaičius.

**Uždavinys 19.** Raskite visus polinomus $f$ su neigiamaisiais sveikaisiais koeficientais, tokius, kad visiems pirminiams skaičiams $p$ ir teigiamiems sveikiesiems skaičiams $n$ egzistuoja pirminis skaičius $q$ ir teigiamas sveikasis skaičius $m$, kad būtų tenkinama lygybė $f(p^n) = q^m$.

**Uždavinys 20.** Raskite visas sveikųjų skaičių poras $(x, y)$, tokias, kad $y^3 - 1 = x^4 + x^2$.

# Olimpiada

Jonas Pukšta

**Uždavinys 1.** (a) Determine the minimal value of $\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(x+\frac{1}{y}-2018\right)+\left(y+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{x}-2018\right)$, where $x$ and $y$ vary over the positive reals.

(b) Determine the minimal value of $\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(x+\frac{1}{y}+2018\right)+\left(y+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{x}+2018\right)$, where $x$ and $y$ vary over the positive reals.

**Uždavinys 2.** Find all functions $f:\mathbb{Q}_{>0}\to\mathbb{Z}_{>0}$ such that

$$f(xy)\cdot\gcd\left(f(x)f(y),f(\frac{1}{x})f(\frac{1}{y})\right)=xyf(\frac{1}{x})f(\frac{1}{y}),$$

for all $x,y\in\mathbb{Q}_{>0,}$ where $\gcd(a,b)$ denotes the greatest common divisor of $a$ and $b$.

**Uždavinys 3.** (a) Let $a,b,c,d$ be real numbers with $0\leqslant a,b,c,d\leqslant 1$. Prove that

$$ab(a-b)+bc(b-c)+cd(c-d)+da(d-a)\leqslant\frac{8}{27}.$$

(b) Find all quadruples $(a,b,c,d)$ of real numbers with $0\leqslant a,b,c,d\leqslant 1$ for which equality holds in the above inequality.

**Uždavinys 4.** Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ such that

$$(f(f(y)-x))^2+f(x)^2+f(y)^2=f(y)\cdot(1+2f(f(y))),$$

for all $x,y\in\mathbb{R}$.

**Uždavinys 5.** A polynomial $p(x)$ of degree $n\geq 2$ has exactly $n$ real roots, counted with multiplicity. We know that the coefficient of $x^n$ is 1, all the roots are less than or equal to 1, and $p(2)=3^n$. What values can $p(1)$ take?

**Uždavinys 6.** Let $n\geq 2$ be an integer. Alice and Bob play a game concerning a country made of $n$ islands. Exactly two of those $n$ islands have a factory. Initially there is no bridge in the country. Alice and Bob take turns in the following way. In each turn, the player must build a bridge between two different islands $I_1$ and $I_2$ such that:

- $I_1$ and $I_2$ are not already connected by a bridge.
- at least one of the two islands $I_1$ and $I_2$ is connected by a series of bridges to an island with a factory (or has a factory itself). (Indeed, access to a factory is needed for the construction.)

As soon as a player builds a bridge that makes it possible to go from one factory to the other, this player loses the game. (Indeed, it triggers an industrial battle between both factories.) If Alice starts, then determine (for each $n\geq 2$) who has a winning strategy. (*Note:* It is allowed to construct a bridge passing above another bridge.)

**Uždavinys 7.** Find the greatest positive integer $N$ with the following property: there exist integers $x_1,...,x_N$ such that $x_i^2-x_ix_j$ is not divisible by 1111 for any $i\neq j$.

**Uždavinys 8.** Pawns and rooks are placed on a $2019\times 2019$ chessboard, with at most one piece on each of the $2019^2$ squares. A rook *can see* another rook if they are in the same row or column and all squares between them are empty. What is the maximal number $p$ for which $p$ pawns and $p+2019$ rooks can be placed on the chessboard in such a way that no two rooks can see each other?

**Uždavinys 9.** Let $n$ be positive integer and fix $2n$ distinct points on a circle. Determine the number of ways to connect the points with $n$ arrows (oriented line segments) such that all of the following conditions hold:

- each of the $2n$ points is a startpoint or endpoint of an arrow;

- no two arrows intersect; and
- there are no two arrows $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{CD}$ such that $A$, $B$, $C$ and $D$ appear in clockwise order around the circle (not necessarily consecutively).

**Uždavinys 10.** In the land of Heptanomisma, four different coins and three different banknotes are used, and their denominations are seven different natural numbers. The denomination of the smallest banknote is greater than the sum of the denominations of the four different coins. A tourist has exactly one coin of each denomination and exactly one banknote of each denomination, but he cannot afford the book on numismatics he wishes to buy. However, the mathematically inclined shopkeeper offers to sell the book to the tourist at a price of his choosing, provided that he can pay this price in more than one way.

(*The tourist can pay a price in more than one way if there are two different subsets of his coins and notes, the denominations of which both add up to this price.*)

(a) Prove that the tourist can purchase the book if the denomination of each banknote is smaller than 49.

(b) Show that the tourist may have to leave the shop empty-handed if the denomination of the largest banknote is 49.

**Uždavinys 11.** In the convex quadrilateral $ABCD$ we have $\angle B = \angle C$ and $\angle D = 90°$. Suppose that $|AB| = 2|CD|$. Prove that the angle bisector of $\angle ACB$ is perpendicular to $CD$.

**Uždavinys 12.** Two circles $\Gamma_1$ and $\Gamma_2$ intersect at points $A$ and $Z$ (with $A \neq Z$). Let $B$ be the centre of $\Gamma_1$ and let $C$ be the centre of $\Gamma_2$. The exterior angle bisector of $\angle BAC$ intersects $\Gamma_1$ again at $X$ and $\Gamma_2$ again at $Y$. Prove that the interior angle bisector of $\angle BZC$ passes through the circumcenter of $\triangle XYZ$.

*For points $P, Q, R$ that lie on a line $\ell$ in that order, and a point $S$ not on $\ell$, the interior angle bisector of $\angle PQS$ is the line that divides $\angle PQS$ into two equal angles, while the exterior angle bisector of $\angle PQS$ is the line that divides $\angle RQS$ into two equal angles.*

**Uždavinys 13.** Let $ABC$ be a triangle, and let $D$ be the point where the incircle meets side $BC$. Let $J_b$ and $J_c$ be the incentres of the triangles $ABD$ and $ACD$, respectively. Prove that the circumcentre of the triangle $AJ_bJ_c$ lies on the angle bisector of $\angle BAC$.

**Uždavinys 14.** Let $ABC$ be a triangle with orthocentre $H$, and let $D$, $E$, and $F$ denote the respective midpoints of line segments $AB$, $AC$, and $AH$. The reflections of $B$ and $C$ in $F$ are $P$ and $Q$, respectively. (a) Show that lines $PE$ and $QD$ intersect on the circumcircle of triangle $ABC$. (b) Prove that lines $PD$ and $QE$ intersect on line segment $AH$.

**Uždavinys 15.** Let $ABC$ be a triangle and let $D$ be a point on the segment $BC, D \neq B$ and $D \neq C$. The circle $ABD$ meets the segment $AC$ again at an interior point $E$. The circle $ACD$ meets the segment $AB$ again at an interior point $F$. Let $A'$ be the reflection of $A$ in the line $BC$. The lines $A'C$ and $DE$ meet at $P$, and the lines $A'B$ and $DF$ meet at $Q$. Prove that the lines $AD, BP$ and $CQ$ are concurrent (or all parallel).

**Uždavinys 16.** An integer $n \geq 2$ having exactly $s$ positive divisors $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_s = n$ is said to be *good* if there exists an integer $k$, with $2 \leq k \leq s$, such that $d_k > 1 + d_1 + \cdots + d_{k-1}$. An integer $n \geq 2$ is said to be *bad* if it is not good.

(a) Show that there are infinitely many bad integers.

(b) Prove that, among any seven consecutive integers all greater than 2, there are always at least four good integers.

(c) Show that there are infinitely many sequences of seven consecutive good integers.

**Uždavinys 17.** Let $n$ be a positive integer. Suppose that its positive divisors can be partitioned into pairs (i.e. can be split in groups of two) in such a way that the sum of each pair is a prime number. Prove that these prime numbers are distinct and that none of these are a divisor of $n$.

**Uždavinys 18.** Does there exist an infinite sequence of positive integers $a_1, a_2, a_3, ...$ such that $a_m$ and $a_n$ are coprime if and only if $|m - n| = 1$?

**Uždavinys 19.** An integer $m > 1$ is *rich* if for any positive integer $n$, there exist positive integers $x, y, z$ such that $n = mx^2 - y^2 - z^2$. An integer $m > 1$ is *poor* if it is not rich.

(a) Find a poor integer.

(b) Find a rich integer.

**Uždavinys 20.** Let $a, b, c, d$ be positive integers such that $ad \neq bc$ and $gcd(a, b, c, d) = 1$. Let $S$ be the set of values attained by $\gcd(an + b, cn + d)$ as $n$ runs through the positive integers. Show that $S$ is the set of all positive divisors of some positive integer.