

Grafai

Motiejus Valiūnas

Uždavinys 1. Pievoje stovi $n \in \mathbb{N}$ žmonių taip, kad kiekvieno žmogaus atstumai iki visų kitų žmonių yra skirtingi. Kiekvienas yra apsiginklavęs vandens pistoletu, ir davus signalą šauna ir pataiko į jam arčiausiai stovintį žmogų.

Jei n yra nelyginis, įrodykite, kad bent vienas žmogus liks sausas. O jei n yra lyginis?

Uždavinys 2. Dvi dienas vykstančiame turnyre žaidžia 2024 komandos. Kiekvieną dieną, kiekviena komanda sužaidžia lygiai vienerias rungtynes (su kažkuria kita komanda).

Įrodykite, kad pasibaigus turnyru liks 1012 komandos nežaidusios viena su kita.

Uždavinys 3. Įrodykite, kad grupėje $n \in \mathbb{N}$ žmonių bus du tokie, kurie šioje grupėje turi tą patį skaičių draugų. (Draugystė visada abipusė ir niekas nėra draugas sau.)

Uždavinys 4. Antanas ir jo žmona Birutė dalyvauja vakarėlyje kartu su keturiomis kitomis sutuoktinių poromis. Vakarėlio metu kai kurie iš šių 10 žmonių paspaudė ranką kitiems, bet niekas nespaudė rankos sau ar savo porai. Vakarėlio pabaigoje, Antanas visų kitų paklausė, keliems žmonėms kiekvienas paspaudė ranką, ir gavo 9 skirtingus atsakymus.

Keliems žmonėms ranką paspaudė Antanas?

Uždavinys 5. 300 šachmatininkų žaidžia turnyre. Jo metu, kiekviena pora žaidėjų sužaidžia ne daugiau nei vieną partiją, ir kiekviename trejete šachmatininkų yra bent viena pora nežaidusių. Egzistuoja skaičius $n \in \mathbb{N}$ tenkinantis sąlygą: kiekvienas žaidėjas sužaidžia ne daugiau nei n partijų, ir kiekvienam $m \in \{1, \dots, n\}$ egzistuoja žaidėjas, sužaidęs lygiai m partijų.

Raskite didžiausią galimą skaičiaus n reikšmę.

Uždavinys 6. Kai kurie MEMO'24 dalyviai tapo draugais MEMO'23 metu. Kiekvienam tokiam dalyviui X , tegu $t(X)$ būna per MEMO'23 surinktų taškų skaičius. Yra žinoma, kad jei X ir Y yra draugai tai $t(X) \neq t(Y)$, ir kad kiekvienam dalyviui X , aibę $\{t(Y) \mid Y \text{ yra } X \text{ draugas}\}$ sudaro iš eilės einantys natūralieji skaičiai.

Raskite mažiausią skaičių salių, į kurias paskirstę mokinius MEMO'24 organizatoriai galėtų garantuoti, kad jokie du draugai nebus paskirti į tą pačią salę.

Uždavinys 7. Pirmasis koordinačių plokštumos kvadrantas yra išklotas 1×2 domino plytelėmis, kurios viena kitos nedengia, užpildo visą kvadrantą ir neišeina iš jo ribų. Blusa sėdi taške $(0, 0)$ ir gali šokti iš plytelės kampo į priešingą kampą neribotą skaičių kartų.

Ar įmanoma plyteles išdėlioti taip, kad blusa, kad ir kaip ilgai šokinėdama, negalėtų nutolti nuo $(0, 0)$ didesnį atstumą nei 2024?

Uždavinys 8. Valstybėje yra 2024 miestai, iš kurių kai kurie yra sujungti geležinkeliais. Yra žinoma, kad nė vienas miestas neturi geležinkelių nutiestų į visus kitus miestus, bet egzistuoja $n \in \mathbb{N}$ tenkinantis sąlygą: bet kuriems n miestams, galima rasti dar vieną, sujungtą geležinkeliais su visais n miestais.

Raskite didžiausią galimą skaičiaus n reikšmę.

Uždavinys 9. Vaikų prieglaudoje kiekviena pora našlaičių yra arba draugai, arba priešai. Kiekviename trejete bet kurio našlaičio draugų yra lyginis skaičius priešų porų.

Įrodykite, kad įmanoma kiekvienam našlaičiui paskirti du tėvus taip, kad kiekviena pora draugų turi lygiai vieną bendrą tėvą, nė viena pora priešų neturi bendrų tėvų, ir nė vienas trejetas tėvų nėra „meilės trikampyje“ (kur kiekviena pora iš šių trijų tėvų turi bent po vieną vaiką).

Uždavinys 10. Du kvadratiniai popieriaus lapai, kiekvieno iš kurių plotas yra 2024, yra padalinti į vienetinio ploto daugiakampius (nebūtinai tuo pačiu būdu abiejuose lapuose) ir padėti vienas ant kito.

Įrodykite, kad įmanoma 2024 smeigtukais perdurti visus 4048 daugiakampius.

Uždavinys 11. Šachmatų lentoje stovi $8n$ bokštų (kur $n \in \{1, \dots, 8\}$), po n kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje.

Įrodykite, kad tarp šių bokštų galima rasti aštuonis, kurie vienas kito neatakuoja.

Uždavinys 12. Senovėje gyveno keltų gentis, sudaryta iš kelių šeimų. Daug iš tų šeimų nesutarė viena su kita, ir tokiu atveju jų vadai nespauštų vieni kitiems rankų. Paskutiniame vadų susitikime jie net suprato, kad neįmanoma išdėlioti keturių ar daugiau vadų į ratą taip, kad kiekvienas jame esantis vadas sutiktų paspausti ranką savo kaimynams.

Siekdamas pabrėžti situacijos rimtumą, genties druidas surinko po tris aukso monetas iš kiekvienos šeimos, ir leido vadams paspausti kitiems vadams rankas, jei jie to norėjo. Už kiekvieną rankos paspaudimą, jis sumokėjo abiems jame dalyvavusiems vadams po vieną aukso monetą.

Įrodykite, kad po visų rankos paspaudimų druidui dar liko bent trys aukso monetos.

Uždavinys 13. Iliuzionistas išdėlioja 52 kortas, sunumeruotas skaičiais $1, \dots, 52$, užverstas ant stalo. Detektyvei yra leidžiama atlikti k ėjimų, per kiekvieną kurių ji nurodo dvi kortas ir iliuzionistas pasako, ar skaičiai užrašyti ant tų kortų eina iš eilės, ar ne. Po šių k ėjimų, detektyvė nurodo dvi kortas ir laimi žaidimą, jei ant jų užrašyti skaičiai eina iš eilės (kitu atveju laimi iliuzionistas).

Įrodykite, kad detektyvė turi laiminčią strategiją tada ir tik tada, kai $k \geq 50$.

Terminologija

Grafas $G = (V, E)$ – tai aibė V (*viršūnės*) ir poaibis $E \subseteq V \times V$ (*briaunos*). Dažniausiai priimsime, kad aibė V yra baigtinė.

Grafą $G = (V, E)$ yra *paprastas* jei $(v, v) \notin E$ visoms $v \in V$, ir *neorientuotas* jei $(w, v) \in E$ visoms $(v, w) \in E$. Priimkime, kad jei kitaip neparašyta, visi nagrinėjami grafai yra paprasti ir neorientuoti; tokiu atveju briauną (v, w) sutapatiname su (w, v) ir galime žymėti $\{v, w\}$ arba tiesiog vw .

Jei grafas G turi briauną vw , tai sakome, kad viršūnė w yra viršūnės v *kaimynas*, ir rašome $v \sim w$. Aibę visų viršūnės v kaimynų žymime $N(v)$, o jos galią vadiname viršūnės v *laipsniu* $\deg(v) = |N(v)|$. Bet kuriam poaibiui $A \subseteq V$, $N(A)$ žymi aibę visų viršūnių, kurios turi kaimynų aibėje A , t.y. $N(A) = \bigcup_{v \in A} N(v)$.

Seka viršūnių $v_0 \dots v_n$ yra vadinama (*ilgio* n) *trasa* jei $v_{i-1} \sim v_i$ ($1 \leq i \leq n$) ir jei kiekviena iš briaunų $v_{i-1}v_i$ yra pereinama tik vieną kartą (t.y. $v_{i-1}v_i \neq v_{j-1}v_j$ kai $i \neq j$). Tokią trasą vadiname *taku* jei $v_i \neq v_j$ kai $i \neq j$, ir *ciklu* jei $v_i = v_j$ tada ir tik tada, kai $i = j$ arba $\{i, j\} = \{0, n\}$ (tokiu atveju $n \geq 3$).

Grafas yra *jungus* jei kiekvieną porą viršūnių galima sujungti taku. Kiekvienas grafas gali būti apibūdintas kaip savo *jungių komponentų* (t.y. maksimalių jungių pografių) nesikertanti sąjunga: $G = G_1 \sqcup \dots \sqcup G_k$.

Lema 1 (rankos paspaudimų). *Kiekvienam grafiui $G = (V, E)$ galioja $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2|E|$.*

Irodymas. Galime surasti aibės $\{(v, e) \in V \times E \mid e = vw \text{ kokiai nors } w \in V\}$ galią dviem būdais: pasirinkus v yra $\deg(v)$ galimų briaunų e , o pasirinkus e yra 2 galimos viršūnės v . $\square$

Pritaikymas. Uždavinys 7.

Klika grafe $G = (V, E)$ vadiname tokį poaibį $A \subseteq V$, kad $v \sim w$ bet kurioms skirtingoms viršūnėms $v, w \in A$. Dažnai naudojamos maksimalių klikų savybės; pavyzdžiui, jei $A, B \subseteq V$ yra dvi skirtingos maksimalios klikos, tai egzistuoja viršūnės $a \in A$, $b \in B$, kurios nėra kaimynėmis.

Pritaikymas. Uždaviniai 8 ir 9.

Dvidaliai grafai

Grafą $G = (V, E)$ vadiname *dvidaliu* jei V galima išskaidyti į dvi aibes $V = J \sqcup B$, kur J ir B yra atitinkamai *juodos* ir *baltos* viršūnės, taip, kad kiekviena briauna jungia skirtingų spalvų viršūnes. Čia J ir B yra vadinamos *viršūnių klasėmis*.

Pritaikymas. Uždavins 6.

Teorema 2. *Grafas yra dvidalis tada ir tik tada, kai neturi nelyginio ilgio cikly.*

Irodymas.

- ($\Rightarrow$) Tarkime, kad ciklas $v_0 \cdots v_n$ prasideda juoda viršūne v_0 . Tada v_1 yra balta, v_2 yra juoda ir t.t., taigi v_k yra juoda jei k lyginis ir balta jei k nelyginis. Kadangi $v_0 = v_n$, n turi būti lyginis.
- ($\Leftarrow$) Tarkime, kad grafas $G = (V, E)$ yra jungus (kitaip šią procedūrą galima pakartoti kiekvienam jungiam komponentui). Pasirinkime viršūnę $v \in V$, ir kiekvienam $n \geq 0$ pažymėkime V_n aibę viršūnių w tokių, kad trumpiausias takas jungiantis v ir w turi ilgį n , t.y. $V_0 = \{v\}$ ir $V_{n+1} = N(V_n) \setminus (V_0 \cup \cdots \cup V_n)$ kai $n \geq 0$. Kiekvieną viršūnę $w \in V_n$ nuspalvinkime juodai, kai n lyginis, ir baltai, kai n nelyginis. Jei būtų briauna jungianti dvi tos pačios spalvos viršūnes, tai tokia briauna jungtų dvi viršūnes $w, w' \in V_n$ kažkuriam $n \in \mathbb{N}$. Tokiu atveju turėtume takus $v_0 \cdots v_n$ ir $v'_0 \cdots v'_n$, kur $v_0 = v = v'_0$, $v_n = w$ ir $v'_n = w'$, ir jei $k \in \{0, \dots, n-1\}$ yra didžiausias toks, kad $v_k = v'_k$, tada išplauktų, kad $v_k v_{k+1} \cdots v_n v'_n v'_{n-1} \cdots v'_k$ yra ilgio $2(n-k)+1$ ciklas, prieštara. $\square$

Jei G yra dvidalis grafas su viršūnių klasėmis J ir B , tai (J, B) -suporavimas yra $|J|$ briaunų kurios neturi bendrų viršūnių, t.y. aibė $\{jw_j \mid j \in J\}$ briaunų, tokių, kad $w_j \neq w_{j'}$ kai $j \neq j'$.

Teorema 3 (Hall'o vedybų). *Dvidalis grafas G su viršūnių klasėmis J ir B turi (J, B) -suporavimą tada ir tik tada, kai $|N(A)| \geq |A|$ visiems $A \subseteq J$.*

Irodymas.

- ($\Rightarrow$) Jei $A' \subseteq B$ yra aibė viršūnių „suporuotų“ su A , tai $|A'| = |A|$ ir $A' \subseteq N(A)$, taigi $|N(A)| \geq |A|$.

- ($\Leftarrow$) Indukcija pagal $|J|$. Jei $J = \emptyset$, tai teiginys akivaizdus.

Priimkime pirma, kad $|N(A)| > |A|$ visiems $A \subseteq J$ išskyrus $A = \emptyset$ ir $A = J$. Pasirinkime $j \in J$ ir $b \in N(j)$, ir tegu G' yra grafas gautas išėmus viršūnes j ir b (ir visas briaunas jungiančias j arba b su kitomis viršūnėmis) iš G . Tada G' turi $(J \setminus \{j\}, B \setminus \{b\})$ -suporavimą pagal indukcinę prielaidą, ir kartu su briauna jb šis suporavimas virsta (J, B) -suporavimu grafui G .

Priimkime dabar, kad $|N(A)| = |A|$ kokiam nors $\emptyset \subsetneq A \subsetneq J$. Tegul G_1 (atitinkamai G_2) yra grafas gautas paėmus viršūnes $A \cup N(A)$ (atitinkamai $(J \setminus A) \cup (B \setminus N(A))$) ir visas briaunas tarp jų. Tada galime patikrinti, kad G_1 ir G_2 tenkina teoremos sąlygą, taigi turi atitinkamus suporavimus pagal indukcinę prielaidą. Šių suporavimų sąjunga yra (J, B) -suporavimas grafui G . $\square$

Pritaikymas. Uždaviniai 10 ir 11.

Hamiltono ir Eulerio maršrutai

Ciklą $v_0 \cdots v_n$ grafe $G = (V, E)$ vadiname *Hamiltono ciklu* jei jis pereina per kiekvieną viršūnę, t.y. $V = \{v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Teorema 4 (Ore'o). *Tarkime, kad kiekvienai porai „nekaimynų“ $v, w \in V$ grafe $G = (V, E)$ galioja $\deg(v) + \deg(w) \geq |V|$. Tada G turi Hamiltono ciklą.*

Irodymas. Iš pradžių pastebėkime, kad grafas G yra jungus. Iš tikrųjų, jei $v, w \in V$ nėra kaimynai, tai $v, w \notin N(\{v, w\})$ ir todėl

$$|N(v) \cup N(w)| = |N(\{v, w\})| \leq |V| - 2 < |V| \leq \deg(v) + \deg(w) = |N(v)| + |N(w)|,$$

iš ko seka, kad $N(v) \cap N(w) \neq \emptyset$, t.y. v ir w turi bendrų kaimynų. Išnagrinėję keletą atskirų atvejų, galime taip pat priimti, kad $|V| \geq 3$, taigi G turi ilgio ≥ 2 takų.

Tegu $v_0 \cdots v_n$ būna ilgiausias takas grafe G . Parodysime, kad grafas G turi ilgio $n + 1$ ciklą. Išties, jei $v_0 \sim v_n$ tai $v_0 \cdots v_n v_0$ yra toks ciklas, o jei $v_0 \not\sim v_n$ tai žiūrėkime į aibės $\{1, \dots, n\}$ poaibius $K = \{i \mid v_0 \sim v_i\}$ ir $L = \{i \mid v_n \sim v_{i-1}\}$. Kadangi takas $v_0 \cdots v_n$ yra ilgiausias, visi v_0 kaimynai yra aibėje $\{v_1, \dots, v_n\}$, taigi $\deg(v_0) = |K|$; analogiškai, $\deg(v_n) = |L|$. Taigi turime

$$|K| + |L| = \deg(v_0) + \deg(v_n) \geq |V| \geq |\{v_0, \dots, v_n\}| > n = |\{1, \dots, n\}| \geq |K \cup L|,$$

iš ko seka, kad $K \cap L \neq \emptyset$. Tada, pasirinkus bet kokią $i \in K \cap L$, turime ilgio $n + 1$ ciklą $v_0 v_1 \cdots v_{i-1} v_n v_{n-1} \cdots v_i v_0$.

Galiausiai, jei šis ilgio $n + 1$ ciklas nėra Hamiltono ciklas, tai faktas kad G yra jungus leistų sukonstruoti ilgio $n + 1$ taką, taigi takas $v_0 \cdots v_n$ nebūtų ilgiausias, prieštara. $\square$

Pritaikymas. Uždavinys 13. Įrodymo strategija panaši į uždavinio 12.

Trasą $v_0 \cdots v_n$ grafe $G = (V, E)$ vadiname *Eulerio trasa* jei ji yra uždara (t.y. $v_0 = v_n$) ir pereina per kiekvieną briauną, t.y. $E = \{v_{i-1} v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Teorema 5. *Jungus grafas $G = (V, E)$ turi Eulerio trasą tada ir tik tada, kai visų G viršūnių laipsniai yra lyginiai.*

Irodymas.

($\Rightarrow$) Eulerio trasa, kiekvieną kartą praeidama pro viršūnę v , prideda 2 prie v laipsnio.

($\Leftarrow$) Indukcija pagal $|V|$. Teiginys yra trivialus kai $|V| \leq 1$, taigi priimkime, kad $|V| \geq 2$.

Kadangi G yra jungus ir $|V| \geq 2$, turime $\deg(v) \neq 0$ (ir todėl $\deg(v) \geq 2$) kiekvienai $v \in V$. Tai mums leidžia, pradedant nuo bet kurios viršūnės v_0 , konstruoti trasą $v_0 v_1 \cdots$ tol, kol nepasiekiamo jau matytos viršūnės. Taigi turime nenulinio ilgio uždara trasą $T = v_i v_{i+1} \cdots v_j$ (kur $v_i = v_j$).

Tegu H būna grafas, gautas iš G išėmus visas trasos T briaunas. Tai darant visų viršūnių laipsniai sumažėjo lyginiu skaičiumi, taigi pagal indukcinę prielaidą, kiekvienas iš jungių grafo H komponentų $(H_1, \dots, H_k)$ turi Eulerio trasą. Kadangi G yra jungus, kiekvienas H_i turi bendrų viršūnių su T , kas mums leidžia „suklijuoti“ T su Eulerio trasomis grafuose $H_1, \dots, H_k$ kad gautume Eulerio trasą grafe G . $\square$

Faktorialai ir binominiai koeficientai

Greta Morkūnė

Problem 1. Raskite visas natūraliųjų skaičių poras (x, y) , tenkinančias

$$x! + 2^y = (x + 1)!$$

Problem 2. Raskite visus natūraliųjų skaičių trejetus (x, y, z) , tenkinančius lygtį

$$x! + 2^y = z!$$

Problem 3. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tenkinančias abi savybes

1) $f(1)f(2) \cdots f(n) = k_n!$, $(k_n \in \mathbb{N})$ visiems $n \in \mathbb{N}$.

2) Bet kuriems $m, n, p \in \mathbb{N}$ egzistuoja trikampis, kurio kraštinių ilgiai yra $f(m)$, $f(n)$ and $f(p)$.

Problem 4. Natūraliesiems skaičiams $n \geq k \geq 0$ žymėkime

$$\left(\binom{n}{k} \right) = \frac{n!!}{k!!(n-k)!!}.$$

Raskite visas tokias natūraliųjų skaičių (n, k) poras $n \geq k \geq 0$, kad $\left(\binom{n}{k} \right)$ yra sveikas skaičius.

Pastaba: $n!!$ apibrėžiamas visų lyginių skaičių sandauga iki (ir įskaitant) n , jei n yra lyginis ir visų nelyginių skaičių sandauga iki (ir įskaitant) n , jei n nelyginis. Pavyzdžiui, $0!! = 1$, $4!! = 2 \cdot 4 = 8$, $7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

Problem 5. Raskite visas natūraliųjų skaičių (a, b) poras, tenkinančias lygtį

$$a! + b! = a^b + b^a.$$

Problem 6. Raskite visas natūraliųjų skaičių (x, y) poras, tenkinančias lygtį

$$x! + y! = x^y.$$

Sveikoji ir trupmeninė skaičiaus dalis

Greta Morkūnė

Problem 1. (a) Įrodykite, kad yra be galo daug tokių racionaliųjų skaičių $x > 0$, kad $\{x^2\} + \{x\} = 0.99$.
(b) Įrodykite, kad nėra tokių racionaliųjų skaičių $x > 0$, kad $\{x^2\} + \{x\} = 1$.

Problem 2. Raskite visus tokius realiuosius skaičius $x > 1$, kad $\sqrt[n]{x^n}$ yra sveikas skaičius su visais natūraliaisiais $n \geq 2$.

Problem 3. Raskite lygties realiųjų sprendinių skaičių

$$\left\lfloor \frac{1}{2} a \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{3} a \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{5} a \right\rfloor = a.$$

Problem 4. Nagrinėkime seką $\left\lfloor \frac{k^2}{1998} \right\rfloor$ su $k = 1, 2, \dots, 1997$. Kiek joje skirtingų narių?

Problem 5. Duota, kad λ yra lygties $t^2 - 1998t - 1 = 0$ teigiamas sprendinys. Duota tokia seka $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, kad $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \lfloor \lambda x_n \rfloor$ for $n = 1, 2, \dots$. Raskite liekaną, dalijant x_{1998} iš 1998.

Problem 6. (a) Įrodykite, kad kiekvienam natūraliajam m egzistuoja toks natūralusis $n \geq m$, kad

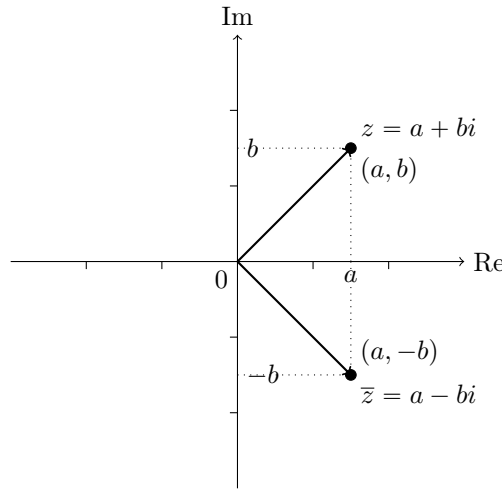
$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdots \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \binom{n}{m} (*)$$

(b) Pažymėkime, kad $p(m)$ yra toks mažiausias natūralusis $n \geq m$ kad tenkinama lygybė (*). Įrodykite, kad $p(2018) = p(2019)$.

Kompleksiniai skaičiai geometrijoje

Deividas Morkūnas

Trumpas įvadas į kompleksinius skaičius. Kiekvienas kompleksinis skaičius gali būti išreikštas kaip $z = a + bi$, kur $i^2 = -1$. Kompleksinio skaičiaus atvirkštinis yra $\bar{z} = a - bi$. Toliau pateiktos tapatybės yra teisingos: $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$, $\overline{a-b} = \bar{a} - \bar{b}$, $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$, $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$, $|a|^2 = a\bar{a}$.



Teoremos, kurias naudosime be įrodymo (jūs **neturite** jų įrodyti olimpiadoje):

1. $AB \parallel CD$ tada ir tik tada, kai $\frac{a-b}{a-b} = \frac{c-d}{c-d}$
2. $AB \perp CD$ tada ir tik tada, kai $\frac{a-b}{a-b} = -\frac{c-d}{c-d}$
3. Taškai A, B, C yra kolinearūs tada ir tik tada, kai $\frac{a-b}{a-b} = \frac{a-c}{a-c}$

Teoremos, kurias įrodysime (jas galite naudoti olimpiadoje be įrodymo).

Uždavinys 1. Įrodykite, kad $\frac{a+b}{2} = c$ tada ir tik tada jei taškas C yra taško AB vidurys.

Uždavinys 2. Įrodykite, kad $c = \frac{a+\alpha b}{1+\alpha}$, tada ir tik tada jei taškas C dalina AB santykiu α .

Uždavinys 3. Jei taškai A, B, C yra ant vienetinio apskritimo ir taškas P ant BC toks, kad $AP \perp BC$, įrodykite, kad $p = \frac{1}{2}(a + b + c - \bar{a}\bar{b}\bar{c})$.

Uždavinys 4. Jei taškai A, B yra ant vienetinio apskritimo, o P yra liestinės sankirtos taškas nuo A ir B , tuomet $p = \frac{2ab}{a+b}$.

Uždavinys 5. Tegu ABC yra trikampis su apskritimo centru O ir ortocentru H , tuomet $h + 2o = a + b + c$.

Uždavinys 6. Jei taškas M yra trikampio ABC pusiaukraštinių susikirtimo taškas, tuomet $m = \frac{a+b+c}{3}$.

Uždavinys 7. Jei taškai A, B, C, D yra ant vienetinio apskritimo, o P yra stygų AB ir CD sankirtos taškas, tuomet

$$p = \frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd}$$

Lengvesnės praktikos užduotys

Uždavinys 1. (Eulerio tiesė) Duotas trikampis ABC , įrodykite, kad ortocentras, pusiauakraštinių susikirtimo taškas ir apibrėžto apskritimo centras yra kolinearūs.

Uždavinys 2. Tegu ABC yra trikampis su apibrėžto apskritimo centru O ir ortocentru H . Taškas P yra ant BC taip, kad $AP \perp BC$. Tegul AP pratęsimas kerta apskritimą antrą kartą taške $D \neq A$. Įrodykite, kad $HP = PD$.

Uždavinys 3. Tegu ABC yra trikampis su apibrėžto apskritimo centru O ir ortocentru H . Tegul M yra BC vidurio taškas. Įrodykite, kad $2 \times OM = AH$.

Uždavinys 4. (Simsono tiesė) Tegu ABC yra trikampis su apibrėžtu apskritimu. Įrodykite, kad statmenys iš bet kurio apskritimo taško D į trikampio ABC kraštines yra kolinearūs.

Uždavinys 5. Tegu trikampio ABC įbrėžtinis apskritimas liečia kraštinę BC taške D , o DT yra apskritimo skersmuo. Jei tiesė AT kerta BC taške X , tai $BD = CX$.

Uždavinys 6. Keturkampis $ABCD$ yra įbrėžtas į apskritimą su skersmeniu AC . Tiesės AB ir CD susikerta taške M , o liestinės apskritimui taškuose B ir D susikerta taške N . Įrodykite, kad $MN \perp AC$.

Uždavinys 7. Duotas keturkampis $ABCD$, kuris yra įbrėžtas į apskritimą, taškus P ir Q pažymime kaip taškus, simetriškus taškui C atitinkamai tiesių AB ir AD atžvilgiu. Įrodykite, kad tiesė PQ praeina per trikampio ABD ortocentrą.

Uždavinys 8. (Egmo 2013) Trikampio ABC kraštinė BC pratęsiama už taško C iki taško D taip, kad $CD = BC$. Kraštinė CA pratęsiama už taško A iki taško E taip, kad $AE = 2CA$. Įrodykite, kad jei $AD = BE$, tuomet trikampis ABC yra statusis.

Uždavinys 9. Tegu S yra trikampio ABC apibrėžtojo apskritimo centras su spinduliu R , o H yra ortocentras. Pažymėkime tašką Q taip, kad S būtų atkarpos HQ vidurio taškas. Tegul trikampių BCQ , CAQ , ABQ pusiauakraštinių susikirtimo taškai yra atitinkamai T_1 , T_2 , T_3 . Įrodykite, kad $AT_1 = BT_2 = CT_3 = \frac{4}{3}R$.

Uždavinys 10. Keturkampis $ABCD$ yra įbrėžtas į apskritimą. Jis liečia kraštines AB , BC , CD , DA atitinkamai taškuose M , N , P , Q . Įrodykite, kad tiesės AC , BD , MP ir NQ susikerta viename taške.

Sunkesnės olimpiadų užduotys

Uždavinys 1. (LTU TST 2015) Duotas lygiagretainis $ABCD$ su centru S . Trikampio ABD įbrėžtinis apskritimas su centru O liečia BD taške T . Įrodykite, kad tiesės OS ir CT yra lygiagrečios.

Uždavinys 2. (EGMO 2023) Duotas smailusis trikampis ABC . Tegul D yra taškas ant jo apibrėžtinio apskritimo taip, kad AD yra skersmuo. Tarkime, kad taškai K ir L yra ant atkarpų AB ir AC , atitinkamai, ir kad DK bei DL yra liestinės apskritimui apie AKL . Įrodykite, kad tiesė KL eina per trikampio ABC ortocentrą.

Uždavinys 3. (MEMO 2021) Tegul AD yra smailiojo trikampio ABC apibrėžtinio apskritimo skersmuo. Tiesės einančios per D , lygiagrečios su AB ir AC , kerta tieses AC ir AB taškuose E ir F , atitinkamai. Tiesės EF ir BC susikerta taške G . Įrodykite, kad AD ir DG yra statmenos.

Uždavinys 4. (MEMO 2017) Tegul ABC yra smailusis trikampis su $AB \neq AC$, apibrėžtinio apskritimo centru O ir apskritimu Γ . Tegul liestinės apskritimui Γ taškuose B ir C susikerta taške D , ir tegul tiesė AO kerta BC taške E . Pažymėkime BC vidurio tašką M , ir tegul AM vėl kerta Γ taške $N \neq A$. Galiausiai, tegul taškas $F \neq A$ yra taškas ant Γ toks, kad taškai A , M , E ir F yra ant vieno apskritimo. Įrodykite, kad FN dalina atkarpą MD pusiau.

Uždavinys 5. (MEMO 2016) Tegul ABC yra trikampis, kuriame $AB \neq AC$. Taškai K , L , M yra kraštinių BC , CA , AB vidurio taškai. Trikampio ABC įbrėžtinis apskritimas su centru I liečia BC taške D . Tiesė, einanti per ID vidurio tašką ir kuri yra statmena IK , kerta tiesę LM taške P . Įrodykite, kad $\angle PIA = 90^\circ$.

Uždavinys 6. (LTU BW TST 2018) Smailiajame trikampyje ABC aukštinės AD ir BE susikerta taške H . Tegul F yra tiesių AB ir tiesės, lygiagrečios BC ir einančios per trikampio ABC apibrėžtinio apskritimo centrą, sankirtos taškas. Tegul M yra atkarpos AH vidurio taškas. Įrodykite, kad $\angle CMF = 90^\circ$.

Uždavinys 7. (LTU TST 2016) Smailiojo nelygiakraščio trikampio ABC aukštinė CK susikerta su kitomis dviem aukštinėmis taške H . Ant kraštinės AB pažymėtas taškas D taip, kad atkarpa CD eina per trikampio ABC apibrėžtinio apskritimo centrą O . Taškas E dalina atkarpą CD pusiau. Įrodykite, kad tiesė EK dalina atkarpą OH pusiau.

MEMO 2024 stovykla

Olimpiada 1

2024-08-15

1. Duota, kad ABC yra statusis trikampis, $\angle B = 90^\circ$. Taškas D yra ant tiesės CB , taip, kad B yra tarp D ir C . Duota, kad E yra AD vidurio taškas, o F yra antrasis apie $\triangle ACD$ ir $\triangle BDE$ apibrėžtų apskritimų susikirtimo taškas. Įrodykite, kad keičiantis taškui D , egzistuoja fiksuotas taškas, pro kurį visada praeina tiesė EF .
2. Burtininkas pagrobė 31 partijos A narių, 28 partijos B narių, 23 partijos C narių ir 19 partijos D narių. Bet kuriuo metu burtininkas gali pasirinkti bet kuriuos tris žmones iš trijų skirtingų partijų ir visus tris padaryti ketvirtos partijos nariais.
 - a) Ar įmanoma, kad po kurio laiko visi pagrobtieji tapo vienos partijos nariais? Jei taip, kuriai partijai jie visi priklauso?
 - b) Raskite visus tokius natūraliųjų skaičių ketvertus, susidedančius iki 101, kad jei laikytume, kad tai keturių skirtingų partijų narių skaičius, tai būtų įmanoma, kad po kurio laiko visi žmonės taptų vienos partijos nariais.
3. Raskite visus tokius sveikuosius n , kad $|n^3 - 4n^2 + 3n - 35|$ ir $|n^2 + 4n + 8|$ yra pirminiai skaičiai.
4. Raskite didžiausią realų tokį skaičių k , kad nelygybė

$$\frac{2(a^2 + kab + b^2)}{(k+2)(a+b)} \geq \sqrt{ab}$$

yra teisinga visiems teigiamiesiems a, b .

MEMO 2024 stovykla

Olimpiada 2

2024-08-19

1. Tegu ABC yra trikampis, o Γ yra apskritimas, kurio skersmuo AB . Kampų $\angle BAC$ ir $\angle ABC$ pusiauokampinės kerta Γ atitinkamai taškuose D ir E . Trikampio ABC įbrėžtinis apskritimas liečia BC ir AC atitinkamai taškuose F ir G . Įrodykite, kad taškai D, E, F ir G yra vienoje tiesėje.
2. Duota $(2n+1) \times (2n+1)$ lenta. Kai kurie jos langeliai nuspalvinti juodai taip, kad kiekviena 2×2 lentos dalis turi daugiausiai 2 juodus langelius. Raskite, kiek daugiausiai juodų langelių gali būti lentoje.
3. Raskite visus natūraliuosius skaičius n , kuris turi du skirtingus daliklius, kurie vienodai nutolę nuo $\frac{n}{3}$.
4. Aritmetinės progresijos pirmasis narys yra natūralusis skaičius $a > 1$. Raskite visas tokias aritmetines progresijas, kad iš skaičių a^2, a^3, a^4, a^5 lygiai du tos yra aritmetinės progresijos nariai, o taip pat aritmetinės progresijos skirtumas yra kuo didesnis (skirtumas neprivalo būti natūralusis skaičius).