

EGMO 2025 stovykla
Olimpiada
Talinas, Estija

2025.01.28

Uždavinys 1. Duota, kad $ABCD$ yra įbrėžtinis keturkampis, H_1 ir H_2 yra atitinkamai trikampių ACD ir DBC aukštinių susikirtimo taškai. Įrodykite, kad $H_1H_2 \parallel AB$.

Uždavinys 2. Raskite visas tokias sveikųjų skaičių poras x, y , kad $y^5 + 2xy = x^2 + 2y^4$.

Uždavinys 3. Skaičius $n \geq 3$ yra natūralusis. Turime n^2 kortų, kurios sunumeruotos $1, 2, \dots, n^2$, ir n tuščių dėžių, į kurias taip įdedame kortas, kad kiekvienoje dėžėje yra po n kortų. Galima atlikti tokią operaciją: pasirenkamos 2 dėžės, išimamos po 2 kortos iš kiekvienos dėžės ir tada jos įdedamos atgal į kitą iš tų dviejų dėžių. Įrodykite, kad ir kaip n^2 kortų pradžioje sudėtos į dėžes, galima taip atlikinėti tokias operacijas, kad po baigtinio skaičiaus operacijų kiekvienoje dėžėje kortų numeriai yra iš eilės einantys skaičiai.

Uždavinys 4. Duoti tokie teigiami realieji skaičiai $a_1, a_2, \dots, a_{2025}$, kad

$$\frac{1}{a_1 + 2025} + \frac{1}{a_2 + 2025} + \dots + \frac{1}{a_{2025} + 2025} = \frac{1}{2025}.$$

Raskite mažiausią galimą $a_1 a_2 \dots a_{2025}$ reikšmę ir nustatykite su kokiais $a_1, a_2, \dots, a_{2025}$ reikšmėmis gaunama ta minimali reikšmė.

Laikas: 4 valandos ir 30 minučių
Kiekvienas uždavinys vertas 7 taškų
Klausimai leidžiami pirmas 30 minučių
Leidžiamos tik rašymo ir braižymo priemonės