Funkcinės lygtys

Deividas Morkūnas

Uždavinys 1. Raskite visas tokias funkcijas $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, kad

$$af(bc) + bf(ac) + cf(ab) = (a + b + c)f(ab + bc + ac).$$

galioja su visais $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$.

Uždavinys 2. Raskite visas tokias funkcijas $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, kad

$$xf(1 + xf(y)) = f\left(f(x) + \frac{1}{y}\right)$$

galioja su visais $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Uždavinys 3. Raskite visas tokias funkcijas $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$, kad

$$\mathrm{MBK}(m, f(m + f(n))) = \mathrm{MBK}(f(m), f(m) + n)$$

galioja su visais $m, n \in \mathbb{Z}^+$.

Uždavinys 4. Raskite visas tokias funkcijas $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, kad

$$f(x) + f(y) \leq \frac{f(x + y)}{2}, \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y} \geq \frac{f(x + y)}{x + y},$$

galioja su visais $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Uždavinys 5. Raskite visas tokias funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kur $a \in \mathbb{R}$ yra konstanta, kad

$$f(xy + f(y)) = f(x)y + a$$

galioja su visais $x, y \in \mathbb{R}$.

Uždavinys 6. Raskite visas tokias funkcijas $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, kad

$$f(xy + 1) = f(x)f\left(\frac{1}{x} + f\left(\frac{1}{y}\right)\right).$$

galioja su visais $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Uždavinys 7. Raskite visas tokias funkcijas $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, kad

$$f(y(f(x))^3 + x) = x^3 f(y) + f(x)$$

galioja su visais $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Nelygybės

Deividas Morkūnas

Uždavinys 1. Tegu n yra teigiamas sveikasis skaičius, kur $n \geq 3$, ir tegu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ yra kažkokio n-kampio kraštinių ilgiai. Įrodykite, kad

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq \sqrt{2 \cdot (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)}$$

Uždavinys 2. Tegu $n \geq 2$ yra fiksuotas teigiamas sveikasis skaičius ir tegu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ yra teigiami realieji skaičiai, tenkinantys $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2^n - 1$. Raskite mažiausią galimą reikšmę išraiškos

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1 + a_1} + \frac{a_3}{1 + a_1 + a_2} + \cdots + \frac{a_n}{1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}$$

Uždavinys 3. Tegu $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, ir tarkime, kad $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ yra skaičių $1, 2, \ldots, 2n$ permutacija tokia, kad $a_1 < a_3 < \ldots < a_{2n-1}$ ir $a_2 > a_4 > \ldots > a_{2n}$. Įrodykite, kad

$$(a_1 - a_2)^2 + (a_3 - a_4)^2 + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})^2 > n^3$$

Uždavinys 4. Tegu $k > 1$ yra realusis skaičius, $n \geqslant 3$ yra sveikasis skaičius, o $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$ yra teigiami realieji skaičiai. Įrodykite, kad

$$\frac{x_1 + kx_2}{x_2 + x_3} + \frac{x_2 + kx_3}{x_3 + x_4} + \cdots + \frac{x_n + kx_1}{x_1 + x_2} \geqslant \frac{n(k+1)}{2}.$$

Uždavinys 5. Tegu n yra sveikasis skaičius, didesnis arba lygus 2. Įrodykite, kad jei realieji skaičiai $a_1, a_2, \cdots, a_n$ tenkina $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = n$, tai

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{n - a_i a_j} \leq \frac{n}{2}$$

turi būti teisinga.

Uždavinys 6. Kiekvienam sveikajam skaičiui $n \geqslant 2$ nustatykite didžiausią realiąją konstantą C_n, tokią, kad visiems teigiamiems realiesiems skaičiams $a_1, \ldots, a_n$ būtų teisinga

$$\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n} \geqslant \left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^2 + C_n \cdot (a_1 - a_n)^2.$$

Uždavinys 7. Tegu $x_1, x_2, \ldots, x_{2024}$ yra neneigiami realieji skaičiai tokie, kad $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{2024}$ ir $x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{2024}^3 = 2024$. Įrodykite, kad

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 2024} (-1)^{i+j} x_i^2 x_j \geq -1012.$$

Uždavinys 8. Tegu $x_1, \ldots, x_{100}$ yra neneigiami realieji skaičiai tokie, kad $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \leq 1$ visiems $i = 1, \ldots, 100$ (čia laikome, kad $x_{101} = x_1$ ir $x_{102} = x_2$). Raskite didžiausią galimą sumos $S = \sum_{i=1}^{100} x_i x_{i+2}$ reikšmę.

Radikalinės ašys

Greta Morkūnė

Problem 1. Turint apskritimus ω_1 ir ω_2, kurie kertasi taškuose X ir Y, tegul ℓ_1 yra tiesė, einanti per ω_1 centrą ir kertanti ω_2 taškuose P ir Q, o ℓ_2 yra tiesė, einanti per ω_2 centrą ir kertanti ω_1 taškuose R ir S. Įrodykite, kad jei P, Q, R ir S yra ant apskritimo, tai šio apskritimo centras yra ant tiesės XY.

Problem 2. Duotas trikampis ABC. Tegul P ir Q yra taškai ant atkarpų $\overline{AB}$ ir $\overline{AC}$, atitinkamai, tokie, kad $AP = AQ$. Tegul S ir R yra skirtingi taškai ant atkarpos $\overline{BC}$ taip, kad S yra tarp B ir R, $\angle BPS = \angle PRS$ ir $\angle CQR = \angle QSR$. Įrodykite, kad P, Q, R, S yra ant to paties apskritimo.

Problem 3. Trikampio ABC perimetras yra 4. Taškas X pažymėtas ant spindulio AB ir taškas Y pažymėtas ant spindulio AC taip, kad $AX = AY = 1$. Atkarpos BC ir XY kertasi taške M. Įrodykite, kad vieno iš trikampių ABM arba ACM perimetras yra 2.

Problem 4. Tegu ABC yra trikampis, kurio apibrėžtinio apskritimo centras yra O. Taškai P ir Q yra atitinkamai CA ir AB kraštinių viduje. Tegul K, L ir M yra atitinkamai atkarpų BP, CQ ir PQ vidurio taškai, o Γ yra apskritimas, einantis per taškus K, L ir M. Tarkime, kad tiesė PQ yra liestinė apskritimui Γ. Įrodykite, kad $OP = OQ$.

Problem 5. Tegu BB_1 ir CC_1 yra trikampio ABC aukštinės. Jei BB_1 kerta apskritimą w_2 su skersmeniu AC taškuose P ir Q, o CC_1 kerta apskritimą w_1 su skersmeniu AB taškuose M ir N, tuomet įrodykite, kad taškai M, N, P ir Q yra ant to paties apskritimo.

Problem 6. Smailiame trikampyje ABC kampas B yra didesnis nei kampas C. Tegul M yra BC vidurio taškas. Taškai D ir E yra atitinkamai aukštinių iš C ir B pėdos. Taškai K ir L yra atitinkamai atkarpų ME ir MD vidurio taškai. Jei KL kerta tiesę, einančią per A ir lygiagrečią BC, taške T, įrodykite, kad $TA = TM$.

Problem 7. Tegu A, B, C, D yra keturi skirtingi taškai ant tiesės, išdėstyti būtent tokia tvarka. Apskritimai su skersmenimis AC ir BD kertasi taškuose X ir Y. Tiesė XY kerta BC taške Z. Tegu P yra taškas ant tiesės XY, išskyrus tašką Z. Tiesė CP kerta apskritimą su skersmeniu AC taškuose C ir M, o tiesė BP kerta apskritimą su skersmeniu BD taškuose B ir N. Įrodykite, kad tiesės AM, DN ir XY susikerta viename taške.

Problem 8. Duotas smailusis trikampis ABC, kuriame $AB < AC$. Taškai E ir F yra atitinkamai aukštinių iš B ir C pėdos. Tiesė, liečianti apie ABC apibrėžtą apskritimą taške A, kerta BC taške P. Tiesė, lygiagreti BC ir einanti per tašką A, kerta EF taške Q. Įrodykite, kad PQ yra statmena trikampio ABC pusiaukraštinei iš taško A.

Problem 9. Tegu Γ_1 ir Γ_2 yra du nesusikertantys apskritimai. Taškai A ir C yra ant Γ_1, o taškai B ir D yra ant Γ_2 taip, kad AB yra išorinė bendroji liestinė šiems dviem apskritimams, o CD yra vidinė bendroji liestinė šiems dviem apskritimams. Tiesės AC ir BD susikerta taške E. Taškas F yra ant Γ_1, Γ_1 liestinė taške F kerta EF vidurio statmenį taške M. Tiesė MG yra liestinė Γ_2 taške G. Įrodykite, kad $MF = MG$.

Problem 10. Tegu ABC yra trikampis. Įbrėžtinis apskritimas trikampyje ABC liečia kraštines AB ir AC taškuose Z ir Y, atitinkamai. Tegul G yra taškas, kuriame susikerta tiesės BY ir CZ, ir tegu R ir S yra tokie taškai, kad keturkampiai $BCYR$ ir $BCSZ$ yra lygiagretainiai. Įrodykite, kad $GR = GS$.

Tikimybinis metodas kombinatorikoje

Aleksandras Melnik

1 Tikimybų teorija

Apibrėžkime pradžiai formaliai tikimybinę erdvę, o mūsų kontekste pakas šnekėti apie diskrečias tikimybines erdves. Taigi tikimybinė erdvę sudaro šie ingredientai:

- Ω - elementariųjų įvykių aibė (mūsų kontekste baigtinė).
- $\mathcal{F}$ - Ω poaibių šeima, vadinama jos įvykiais. Ši šeima turi būti uždara sąjungomis bei papildiniais, t.y. jei $A \in \mathcal{F}$ ir $B \in \mathcal{F}$ tai ir $A \cup B \in \mathcal{F}$ bei $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$.
- $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ - tikimybinis matas. Šis matas turi tenkinti šias savybes:
  1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
  2. Jei $A \cap B = \emptyset$ tai $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Įrodykite, kad $\emptyset \in \mathcal{F}$ ir $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Baigtinės tikimybinės erdvės atveju, dažniausiai naudojama šeima $\mathcal{F} = 2^\Omega$, t.y. visų Ω poaibių aibė. Tokiu atveju, matas $\mathbb{P}$ yra pilnai nusakomas savo reikšmių taškinėse aibėse $\mathbb{P}(\{a\})$, jas dar žymime p_a.

Kita esminė sąvoka yra *atsitiktinis kintamasis* X. Mūsų kontekste atsitiktinis kintamasis yra funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Vienintelis reikalavimas yra tas, kad bet kurio realaus $r \in \mathbb{R}$ pirmavaizdis $X^{-1}(r) = \{a \in \Omega \mid X(a) = r\}$ priklauso $\mathcal{F}$. Tai leidžia natūraliai aibę $X^{-1}(r)$, kaip *įvykį, jog X įgyją reikšmę r*. Atitinkamą tikimybę žymime:

$$\mathbb{P}(X = r) := \mathbb{P}(X^{-1}(r))$$

Įrodykite, kad visi realūs r išskyrus baigtinį jų skaičių įgyjami su nuline tikimybe, t.y. $\mathbb{P}(X = r) = 0$ Tada galime ir kiekvienam kitamajam pamatuoti jo *vidurkį*[1]:

$$\mathbb{E}(X) := \sum_{r \in R} r \cdot \mathbb{P}(X = r)$$

Tuo atveju kai $\mathcal{F} = 2^\Omega$, galioja patogesnė formulė: Įrodykite $\mathbb{E}(X) = \sum_{a \in \Omega} X(a) \cdot p_a$ Atsitiktiniai kintamieji pasižymi taip pat patogiomis algebrinėmis savybėmis[2] - juos galima sudėti ir dauginti iš konstantos, t.y., jei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ir $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ atsitiktiniai kintamieji, o $\lambda \in R$ realusis skaičius tai apibrėžiame funkciją $X + \lambda Y : \Omega \to \mathbb{R}$ pareikšmiui visiems $a \in \Omega$ kaip:

$$(X + \lambda Y)(a) := X(a) + \lambda \cdot Y(a)$$

Įrodykite, kad $X + \lambda Y : \Omega \to \mathbb{R}$ yra atsitiktinis kintamasis. Čia pasiekiame be galo naudingą savybę tikimybiniam metodui kombinatorikoje: *vidurkio tiesiškumą*:

Įrodykite, kad visiems atsitiktiniams kintamiesiems galioja:

$$\mathbb{E}(X + \lambda Y) = \mathbb{E}(X) + \lambda \cdot \mathbb{E}(Y)$$

2 Tikimybinis metodas

2.1 Dirichlet iš naujo

Dirichlet narvelių principas natūraliai išsiverčia į tikimybių teoriją:

Įrodykite, jog jei $\mathbb{E}(X) > c$ tai egsituoja $a \in \Omega$ toks, kad $X(a) > c$

Šis principas labai galingas uždaviniuose kuriems reikia įrodyti, elemento su specifine savybe egzistavimą. Tai galima daryti konstruktyiviai, t.y. bandant tą elementą tiesiogiai "surasti", tai dažniausiai būna sunkiai padaroma, tad tada bando rezultatą gauti nekonstrukyviai, t.y. parodyti elemento su savybe egzistavimą jo tiesiogiai nepateikiant, kam puikiai tinka aukščiau esantis principas.

Štai pavyzdys, šio metodo panaudojimo iš jo pradininko Paul Erdős'o:

Sakome, jog sveikųjų skaičių aibė S yra *besumė*, jei joje nėra skaičių trejeto $\{x, y, z\}$ tokio, kad $x + y = z$. Įrodykite, kad bet kuri nenulinių sveikųjų skaičių aibė A turi poaibį $B \subseteq A$ tokį, kad $|B| > \frac{1}{3}|A|$ ir B besumė.

[1] Kanoninis lietuviškas terminas yra *matematinė viltis*, bet niekas taip nesako IRL.

[2] jie sudaro tiesinę erdvę (*angl. vector space*)

Sprendimo schema. Idėja tokia, jog jei A būtų iš eilės einančių skaičių seka, mes galėtume tiesiog paimti vidurinį sekos trečdalį. Bendru atveju pasinaudosime skaičių teorija ir tikimybiniu principu analogiškai konstrukcijai rasti. Tą darome tokiais žingsniais:

1. Tegul p yra pirminis formos $3k+2$. Tegul S=$\{k, k+1, \ldots, k+(k+1)\}$, parodykite, kad S yra besumė *moduliu* p, t.y. neegzisuotja tokių x, y ir z iš S, kad $x+y \equiv z \pmod{p}$
2. Pagal Dirichlet pirminių skaičių teoremą egzistuos tokios formos p didesnis nei $\max_{a\in A} a$.
3. B egzistavimą parodysime tolygiai atsitiktinai pasirinkdami parametrą t iš $\mathbb{Z}_p \setminus 0$. Jis mums pagamina poaibį:

$$B_t := \{a \in A : at \pmod{p} \in S\}$$

4. Įrodykite, kad B_t besumė.
5. Mums, reiškia, rūpi a.d. $|B_t|$. Jį galime išreikšti ir k
6. $$\mathbb{E}(|B_t|) = \sum_{a\in A} \mathbb{P}(a \in B_t) = \sum_{a\in A} \mathbb{P}(at \pmod{p} \in S) > \frac{1}{3}|A|$$
7. Reiškia, egzistuoja toks t, kad $|B_t| > \frac{1}{3}|A|$

Čia naudojome išskirtinę klasę a.d. - indikatorinius a.d. Prisiminkime įvykiais vadiname tiesiog $\mathcal{F}$ elementus, tada kiekvienam $A \in \mathcal{F}$ galime apibrėžti jo indikatorinį a.d.

$$I_A(a) := 1 \text{ kai } a \in A;\ 0 \text{ priešingai}$$

Taip pat sakysime, kad du įvykiai A ir B *nepriklausomi*, tada kai $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

Įrodykite, jog jei A ir B nepriklausomi, tai $\mathbb{E}(I_A \cdot I_B) = \mathbb{E}(I_A) \cdot \mathbb{E}(I_B)$

Turnyru vadiname pilnąjį kryptinį grafą. Hamiltono takas turnyre, yra seka viršūnių, kuria judamas pagal briaunų kryptis ir visos viršūnės aplankomos lygiai vieną kartą. Įrodykite, kad visiems natūraliems n egzistuoja turnyras su n viršūnių ir bent $\frac{n!}{2^{n-1}}$ Hamiltono takų.

Sprendimas. Vietoj to, kad konstruotume tokį turnyrą tiesiogiai, mes jį sugeneruosime atsitiktinai, ir parodysime, kad Hamiltono takų skaičiaus vidurkis yra pakankamai didelis.

Atsitiktinį turnyrą T sugeneruojame atsitiktinai ir nepriklausomai pasirinkdami kiekvienos briaunos kryptį su tikimybe $\frac{1}{2}$. Tebūnie n nesikartojančių viršūnių sekai s, apibrėžkime indikatorinį a.d. I_s, kuris lygus 1, kai s sudaro Hamiltono taką ir lygus 0 priešingu atveju. Kadangi s sudarys Hamiltono taką tik tada kai visos $n-1$ brianos tarp gretimų sekos narių atsiverčia reikiama kryptim, turime:

$$\mathbb{P}(I_s = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Pažymėję S - aibę $n-1$ ilgio sekų be pasikartojimo, apibrėžkime Hamiltono takų skaičius grafe:

$$H := \sum_{s\in S} I_s$$

Jo vidurkis tada:

$$\mathbb{E}(H) = \mathbb{E}\left(\sum_{s\in S} I_s\right) = \sum_{s\in S} 1\cdot \mathbb{P}(I_s=1) = \sum_{s\in S}\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{|S|}{2^{n-1}} = \frac{n!}{2^{n-1}}$$

Taigi egsituos bent viena T realizacija kurioje Hamiltono takų yra ne mažiau nei vidurkis, t.y. $\frac{n!}{2^{n-1}}$.

Grafo G *neriklausomumo skaičius* (Independence number) $I(G)$ yra dydis didžiausio poabio viršūnių, tokių, kad tarp jų nebūtų briaunų.

Žymint grafo viršūnės v laipsnį d_v, įrodykite, jog $I(G) \geq \sum_{v\in G}\frac{1}{1+d_v}$

Sprendimas. Paimkime atsitiknį grafo viršūnių $v_1, v_2, \ldots v_n$ perstatą. Šis perstatas apibrėš unikaliai nepriklausomą pografį H, įtraukiant tas viršūnes kurių visi kaimynai pasirodo vėliau už jas perstate.

Tikimybė, kad konkreti v atsitiktiniam perstate eis anksčiau savo kaimynų yra $\frac{1}{d_v+1}$, reiškia toks ir vidurkis indikatorinio a.d. I_v įvykiui $v\in H$.

Kadangi $|H| = \sum_{v\in G} I_v$, taigi gauname reikiamą įvertį H dydžiui.

Šį rezultatą galime apibendrinti [MOP 2010]: Tebūnie G grafas su E briaunų ir n viršūnių, kurių laipsniai $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Tebūnie k natūralusis skaičius tenkinantis $k \leq \frac{2E}{n}$. Parodykite, jog G turės indukuotą porgafį H tokį, kad H nepriklauso klika K_{k+1} ir H turi bent $\frac{kn^2}{2E+n}$ viršūnių.

Sprendimas. Analogiškai, kaip praeitame uždavinyje.

[IMO SL 2012, C7] Ant apskritimo sužymėti 2^{500} taškų kažkuria tvarka etiketėmis 1,2, ... 2^{500}. Apibrėžkime apskritimo stygos *vertę* kaip reikšmių jos galuose sumą. Įrodykite, kad egzistuoja 100 poromis nesikertančių stygų su ta pačia verte.

Sprendimo schema

1. Tegul $n = 2^{499}$, tada yra $\binom{2n}{2}$ stygų kurių vertės priklauso aibei $\{3, 4, \ldots, 4n-1\}$. Idėja yra pasirinkti kandidatinę vertę $\mathbf{c}$ tolygiai atsitiktinai, ir gauti gerą įvertį reikiamo a.d. vidurkiui.

2. Sudarykime stygų su ta pačia verte c incidentumo grafą G_c, kur viršūnės yra stygos, o tarp jų briauna tada ir tik tada kai atitinkamos stygos kertasi.

3. Taigi ieškom didelės nepriklausomos aibės kažkuriame iš G_c. Renkantis atsitiktinį $\mathbf{c}$, užtenka parodyt, jog $\mathbb{E}(I(G_\mathbf{c})) \geq$ 100

4. Įvertinkime $\mathbb{E}(I(G_\mathbf{c}))$ naudodamiesi iš praeito uždavinio įverčiu $I(G_\mathbf{c}) \geq \sum_{v\in G_\mathbf{c}}\frac{1}{1+d_v}$:

$$\mathbb{E}(I(G_\mathbf{c})) \geq \frac{1}{4n-3}\sum_{c=3}^{4n-1}\left(\sum_{v\in G_c}\frac{1}{1+d_v}\right)$$

5. Prisiminkime, kad v čia yra styga, kuri turi konkrečią vertę, tad pasirodo lygiai viename iš G_c. Reiškia, dešinioji aukščiau esančio įverčio pusės susipaprastina iki sumos per visas stygas

6. Dabar įvertinsime d_v. Paėmus stygą v, pažymėkime $m(v)$ skaičių viršūnių jos mažajam puslankyje. Akivaizdu, kad v gali kristi daugiausiai $m(v)$ kitų stygų su ta pačia verte, taigi $d(v) \leq m(v)$.

7. Taip pat matome, kad kiekvieną iš įmanomų $m(v)$ verčių įgyja lygiai $2n$ stygų v.

8. Suvedus viską kartu:

$$\mathbb{E}(I(G_\mathbf{c})) \geq \frac{1}{4n-3}\left(\sum_v \frac{1}{1+d_v}\right) \geq \frac{1}{4n-3}\left(\sum_v\frac{1}{1+m(v)}\right) \geq$$

$$\geq \frac{2n}{4n-3}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+i}\right) \geq \frac{1}{2}\ln n = \frac{1}{2}\ln 2^{499} = \frac{499}{2}\ln 2 > 100$$

2.2 Nesikertantys įvykiai

Sakome, jog įvykiai A ir B nesikertantys, jei $A \cap B = \emptyset$.

[Lema] Jei $A_1, A_2, \dots A_n$ nesikertantys[3], tai $A_1 + A_2 \cdots + A_n \leq 1$

Pritaikysime lemą: [IMO SL 2009, P4] Paimkime $2^m \times 2^m$ šachmatų lentelę. Ji išdalinta į stačiakampius taip, kad kiekvienas langelis pagrindinėje įstrižainėje padengtas atskiru 1×1 stačiakampiuku. Nustatykite kokia gali būti mažiausia visų stačiakampių perimetrų suma.

Sprendimas. W.L.O.G nagrinėkime apatinį trikampį, ir fiksuokime dengimą.

1. Tegul E_i būna aibė stačiakampių kurie turi bent vieną langelį i-tojoje eilutėje, o S_i aibė stačiakampių kurie turi langelį i-tajame stulpelyje.
2. Jų bendras perimetras bus $P = \sum_i |E_i| + |S_i|$.
3. Dabar sugeneruosime atsitiktinį rinkinį stačiakampių pasirinkdami kiekvieną stačiakampį nepriklausomai su tikimybe $1/2$
4. Tebūnie A_i įvykis, kad visi iš E_i buvo pasirinkti, bet nei vienas iš S_i nebuvo pasirinktas. Aišku, $\mathbb{P}(A_i) = 2^{-(E_i+S_i)}$.
5. Įsitikiname, jog $A_1, A_2, \dots A_n$ nesikertantys, taigi $\sum 2^{-(E_i+S_i)} \leq 1$ pagal lemą.
6. Taikome $AM - GM$ kairiajai pusei ir gauname įvertį $P \geq m2^{m+1}$

[Lubell-Yamamoto-Meshalkin (LYM) nelygybė] Tegul $B_1, B_2, \dots, B_k$ poaibiai $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ tokie kad nei vienas iš jų nėra kito poaibis (antigrandinė). Pažymėkime $|B_i| = b_i$, tada

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\binom{n}{b_i}} \leq 1$$

Sprendimas. Paimkime tokygiai atsitiktinį $[n]$ perstatą. Tegul A_i įvykis, kad šio perstato pradžia sudaro B_i. Pastebėję, jog $A_1, A_2, \dots A_n$ yra nesikertantys ir susumavę jų tikimybes, gauname norimą rezultatą.

Išvada. Sperner'io teorema. Didžiausia antigrnadinė turi ne daugiau kaip $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ elementų.

3 Papildomi Uždaviniai

1. [Max cut revisited]
Give a probabilistic argument showing that the vertex set V of a graph G with edge set E can be partitioned into two sets V_1 and V_2 such that at least $|E|/2$ edges have one endpoint in V_1 and one endpoint in V_2.

2. [Hypergraph coloring]
Let F be a family of sets such that each set contains n elements and $|F| < 2^{n-1}$. Show that each element can be assigned either the color red or the color blue, such that no set in F is monochromatic (contains elements of only one color).

3. [A Bound on Ramsey Numbers]
The Ramsey number $R(k, j)$ is defined as the least number n such that for any graph G on n vertices, G either contains a clique of size k or an independent set of size j. Show that $R(k, k) \geq 2^{k/2}$ for each k.

4. [Stronger version of IMO Shortlist 1999, C4]
Let A be a set of n different residues mod n^2. Then prove that there exists a set B of n residues mod n^2 such that the set $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ contains at least $(e-1)/e$ of the residues mod n^2.

5. [Another hypergraph coloring problem]
Let F be a family of sets such that each set contains n elements. Suppose each set in F intersects at most 2^{n-3} other sets in F. Show that each element can be assigned either the color red or the color blue, such that no set in F is monochromatic. Improve this bound (that is, replace 2^{n-3} by a larger number and prove the result for this number).

6. [Based on Russia 1999]
Let G be a bipartite graph with vertex set $V = V_1 \cup V_2$. Show that G has an induced subgraph H containing at least $|V|/2$ vertices, such that each vertex in $V_1 \cap H$ has odd degree in H.

[3] Turime omenyje poromis

7. [USAMO 2012, Problem 2]
A circle is divided into 432 congruent arcs by 432 points. The points are colored in four colors such that some 108 points are colored Red, some 108 points are colored Green, some 108 points are colored Blue, and the remaining 108 points are colored Yellow. Prove that one can choose three points of each color in such a way that the four triangles formed by the chosen points of the same color are congruent.

8. [List coloring]
Each vertex of an n-vertex bipartite graph G is assigned a list containing more than $\log_2 n$ distinct colors. Prove that G has a proper coloring such that each vertex is colored with a color from its own list.

9. Let A be an $n \times n$ matrix with distinct entries. Prove that there exists a constant $c > 0$, independent of n, with the following property: it is possible to permute the rows of A such that no column in the permuted matrix contains an increasing subsequence of length $\sqrt{n}$. (Note that consecutive terms in a subsequence need not be adjacent in the column; "subsequence" is different from "substring.")

10. [IMO Shortlist 2006, C3]
Let S be a set of points in the plane in general position (no three lie on a line). For a convex polygon P whose vertices are in S, define $a(P)$ as the number of vertices of P and $b(P)$ as the number of points of S that are outside P. (Note: an empty set, point and line segment are considered convex polygons with 0, 1 and 2 vertices respectively.) Show that for each real number x,

$$\sum_{a(P)\cdot(1-x)^{b(P)}} = 1,$$

where the sum is taken over all convex polygons P.

11. [Bipartite Expanders]
A bipartite graph G with vertex set $V = V_1 \cup V_2$ is said to be an (n, m, d, β) bipartite expander if the following holds:

(i) $|V_1| = n$ and $|V_2| = m$

(ii) Each vertex in V_1 has degree d

(iii) For any subset S of V with $|S| \leq n/d$, there are at least $\beta|S|$ vertices in V_2 that have a neighbor in S

Show that for any integers $n \geq d \geq 4$, there exists an $(n, n, d, d/4)$ bipartite expander.

12. [Sphere packing]
Let n be a given positive integer. Call a set S of binary strings of length n *α-good* if for each pair of strings in S, there exist at least $n\alpha$ positions in which the two differ. For instance, if $n = 100$ and $\alpha = 0.1$, then any pair of strings in S must differ in at least 10 positions. Show that for each integer n and real number $0 < \alpha < 0.5$, there exists an α-good set S of cardinality at least $\left\lceil \sqrt{2^{n(0.5-\alpha^2)}} \right\rceil$.

As a (rather remarkable) corollary, deduce that the unit sphere in n dimensions contains a set of $\left\lceil \sqrt{2^{n/16}} \right\rceil$ points such that no two of these points are closer than one unit (Euclidean) distance from each other.

13. Let F be a collection of k-element subsets of $\{1, 2, \ldots, n\}$ and let $x = |F|/n$. Then there is always a set S of size at least $\frac{\pi x}{4\sqrt{k(k-1)}}$ which does not completely contain any member of F.

14. [Another list coloring theorem]
Each vertex of an n-vertex graph G is assigned a list containing at least k different colors. Furthermore, for any color c appearing on the list of vertex v, c appears on the lists of at most $k/2e$ neighbors of v. Show that there exists a proper coloring of the vertices of G such that each vertex is colored with a color from its list.

15. [Due to Furedi and Khan]
Let F be a family of sets such that each set in F contains at most n elements and each element belongs to at most m sets in F. Show that it is possible to color the elements using at most $1 + (\ln m) \ln n$ colors such that no set in F is monochromatic.

16. [IMO 2012, Problem 3]
The liar's guessing game is a game played between two players A and B. The rules of the game are as follows:

A begins by choosing integers x and N with $1 \leq x \leq N$. Player A keeps x secret, and truthfully tells N to player B. Player B now tries to obtain information about x by asking player A questions as follows: each question consists of B specifying an arbitrary set S of positive integers (possibly one specified in some previous question), and asking A whether x belongs to S. Player B may ask as many questions as he wishes. After each question, player A must immediately answer it with yes or no, but is allowed to lie as many times as he wants; the only restriction is that, among any $(k+1)$ consecutive answers, at least one answer must be truthful.

After B has asked as many questions as he wants, he must specify a set X of at most n positive integers. If x belongs to X, then B wins; otherwise, he loses. Prove that:

1. If $n \geq 2^k$, then B can guarantee a win.

2. For all sufficiently large k, there exists an integer $n \geq 1.99^k$ such that B cannot guarantee a win.